LE JEU REVERSI I : DE LA TERMINALE À LA LICENCE

MIKHAIL ZAIDENBERG (IREM DE GRENOBLE)

Résumé. Notre objectif est, à travers le jeu de reversi, de faire rencontrer au lecteur divers objets mathématiques. Ces notes sont écrites en vue d'une éventuelle utilisations par des professeurs dans les classes de terminales (spécialement en TPE), dans les classes préparatoires, et même en TD de géométrie en licence de mathématiques. Elles sont oriéntées plutôt vers les étudiants en sciences, amateurs des maths. Le texte a été distribué à quelques lycéens et aux étudiants de la licence, qui ont obtenu certains des résultats cités ici.

Table des matières

Introduction : le jeu reversi

Le jeu qu'on appelle ici 'reversi' se joue (avec un seul joueur) sur un damier carré 3×3. Chaque case est occupée par un jeton bicolore montrant soit sa face noire soit sa face blanche. Deux cases du damier sont dites *voisines* si elles ont une arête commune.

Un coup consiste à retourner un des jetons ainsi que tous ses voisins.

Le but du jeu est d'obtenir un damier tout blanc.

Remerciements: Cela me fait plaisir de remercier tous les membres de l'équipe 'modélisation' de l'IREM de Grenoble : Roland Bacher, Martine Brilleaud, Héléne Di Martino, Denise Grenier, Françoise Richard (qui nous a fait connaître le jeu de reversi) pour des vives discussions qui m'ont beaucoup appris. Ces notes représentent une partie du travail de l'équipe, en 2002-2004, qui est en cours de rédaction.

On propose ici un modèle mathématique pour décider si à partir d'un damier avec une configuration initiale donnée, il est possible de terminer le jeu, et de quelle manière.

On considérera également quelques versions du 'reversi' sur des damiers différents.

1. Quelques préliminaires de l'algèbre

On introduit ici quelques notions qui ne sont pas compliquées mais qui ne font pas partie du programme du secondaire.

1.1. **L'arithmétique modulo 2.** C'est l'arithmétique la plus simple que l'on puisse imaginer. Elle est à la base du fonctionnement d'un ordinateur. Dans cette arithmétique, on remplace tout entier pair par $\bar{0}$ et tout entier impair par $\bar{1}$. Puisque la somme de deux entiers impairs est pair, etc., on a les égalités suivantes :

$$\bar{0}+\bar{0}=\bar{0}, \quad \bar{0}+\bar{1}=\bar{1}+\bar{0}=\bar{1}, \quad \bar{1}+\bar{1}=\bar{0}\,,$$
$$\bar{0}\cdot\bar{0}=\bar{0}\cdot\bar{1}=\bar{1}\cdot\bar{0}=\bar{0}, \quad \bar{1}\cdot\bar{1}=\bar{1}\,,$$

et donc

$$-\bar{0}=\bar{0}, \quad -\bar{1}=\bar{1}, \quad \bar{0}/\bar{1}=\bar{0}, \quad \bar{1}/\bar{1}=\bar{1}\,.$$

On note désormais $\mathbb{F}_2$ l'ensemble constitué des deux éléments $\bar{0}$ et $\bar{1}$ muni de quatre lois de l'arithmétiques (l'addition, la soustraction, la multiplication et la division) suivant les formules ci-dessus. Les régles usuelles de parenthèsage restent valables. On peut donc vérifier que $\mathbb{F}_2$ est un *corps*.

1.2. **L'espace vectoriel $\mathbb{F}_2^n$.** On considère les *vecteurs* $\vec{u}=(x_1,\ldots,x_n)$ ayant n coordonnées où $x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{F}_2$. Ainsi le plan $\mathbb{F}_2^2$ est constitué des 4 vecteurs :

$$(\bar{0},\bar{0}),\ (\bar{1},\bar{0}),\ (\bar{0},\bar{1}),\ (\bar{1},\bar{1})\,,$$

tandis que l'espace $\mathbb{F}_2^3$ est constitué des 8 vecteurs suivants :

$$(\bar{0},\bar{0},\bar{0}),\ (\bar{1},\bar{0},\bar{0}),\ (\bar{0},\bar{1},\bar{0}),\ (\bar{0},\bar{0},\bar{1})\,,$$
$$(\bar{1},\bar{1},\bar{0}),\ (\bar{1},\bar{0},\bar{1}),\ (\bar{0},\bar{1},\bar{1}),\ (\bar{1},\bar{1},\bar{1})\,.$$

Étant donné n, on montre sans peine qu'il y a 2^n vecteurs différents à n coordonnées, et que ceux-ci forment un *espace vectoriel* sur $\mathbb{F}_2$ noté $\mathbb{F}_2^n$. Cela signifie que, quelque soient deux vecteurs $\vec{u}=(x_1,\ldots,x_n)$ et $\vec{v}=(y_1,\ldots,y_n)$ dans $\mathbb{F}_2^n$, on peut les additionner/soustraire :

$$\vec{u}\pm\vec{v}=(x_1\pm y_1,\ldots,x_n\pm y_n)\,.$$

Puisque $-\bar{0}=\bar{0}$ et $-\bar{1}=\bar{1}$ dans $\mathbb{F}_2$, on a : $-\vec{v}=\vec{v}$ et donc $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+\vec{v}$. La multiplication d'un vecteur quelconque $\vec{u}$ de $\mathbb{F}_2^n$ par un scalaire de $\mathbb{F}_2$ est donnée simplement par :

$$\bar{0}\cdot\vec{u}=\vec{0} \quad \text{et} \quad \bar{1}\cdot\vec{u}=\vec{u}\,.$$

Les n vecteurs :

$$\vec{e}_1=(\bar{1},\bar{0},\ldots,\bar{0}), \quad \vec{e}_2=(\bar{0},\bar{1},\bar{0}\ldots,\bar{0}), \quad \ldots, \quad \vec{e}_n=(\bar{0},\bar{0},\ldots,\bar{0},\bar{1})$$

forment la *base canonique* (ou *naturel* ou *standard*) de l'espace vectoriel $\mathbb{F}_2^n$. Cela signifie que tout vecteur $\vec{u}=(x_1,\,\ldots,\,x_n)$ de $\mathbb{F}_2^n$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\vec{u}=x_1\vec{e}_1+\ldots+x_n\vec{e}_n\,.$$

Par exemple, pour $n=3$ et pour $\vec{u}=(\bar{1},\bar{1},\bar{1})$ on a :

$$\vec{u}=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3\,,$$

et si $\vec{v} = (\bar{1}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{1}) \in \mathbb{F}_2^4$ alors on a :

$$\vec{v} = \vec{e}_1 + \vec{e}_4\,.$$

Une famille de n vecteurs $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ dans $\mathbb{F}_2^n$ (pris parmi 2^n vecteurs) est appellée une *base* de l'espace $\mathbb{F}_2^n$ si tout vecteur $\vec{u}$ dans $\mathbb{F}_2^n$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\vec{u} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n$$

où les coefficients a_i sont $\bar{0}$ ou $\bar{1}$. Par exemple, les vecteurs $\vec{v}_1 = \vec{e}_1 = (\bar{1}, \bar{0})$ et $\vec{v}_2 = (\bar{1}, \bar{1})$ forment une base du plan $\mathbb{F}_2^2$. En effet, les 4 vecteurs du plan $\mathbb{F}_2^2$ admettent les décompositions suivantes :

$$\vec{0} = \bar{0}\cdot\vec{v}_1 + \bar{0}\cdot\vec{v}_2, \quad \vec{e}_1 = \bar{1}\cdot\vec{v}_1 + \bar{0}\cdot\vec{v}_2, \quad \vec{e}_2 = \bar{1}\cdot\vec{v}_1 + \bar{1}\cdot\vec{v}_2 \quad \text{et} \quad \vec{v}_2 = \bar{0}\cdot\vec{v}_1 + \bar{1}\cdot\vec{v}_2\,,$$

et ces écritures sont uniques.

On dit qu'une famille de vecteurs $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ de $\mathbb{F}_2^n$ est *linéairement indépendante* si l'égalité $a_1\vec{v}_1 + \ldots + a_k\vec{v}_k = \vec{0}$ n'est possible que pour $a_1 = \ldots = a_k = \bar{0}$.

Proposition 1.1. *Pour toute famille $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ de n vecteurs dans $\mathbb{F}_2^n$, les assertions suivantes sont deux-à-deux équivalentes :*

- *la famille $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ est une base de l'espace $\mathbb{F}_2^n$;*
- *la famille $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ est linéairement indépendante ;*
- *tout vecteur $\vec{e}_i$ de la base canonique de $\mathbb{F}_2^n$ s'exprime en termes de la famille $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ comme :*

$$\vec{e}_i = a_{i1}\vec{v}_1 + \ldots + a_{in}\vec{v}_n\,,$$

où les coefficients a_{ik} sont $\bar{0}$ ou $\bar{1}$.

1.3. **Le groupe de translations.** La *translation* $t_{\vec{v}} : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2^n$ de vecteur $\vec{v}$ de $\mathbb{F}_2^n$ associe à tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{F}_2^n$ le vecteur $t_{\vec{v}}(\vec{u}) = \vec{u} + \vec{v}$. La composée de deux translations $t_{\vec{v}}$ et $t_{\vec{w}}$ est la translation de vecteur $\vec{v} + \vec{w}$:

$$t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{w}} = t_{\vec{w}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}+\vec{w}}\,.$$

Ainsi $t_{-\vec{v}}$ est l'inverse de la bijection $t_{\vec{v}}$. L'ensemble des translations $t_{\vec{v}}$, où $\vec{v}$ parcourt l'espace vectoriel $\mathbb{F}_2^n$, forme un groupe appellé le *groupe de translations.* Ce groupe est abélien, c'est à dire commutatif. La correspondance $\vec{v} \longmapsto t_{\vec{v}}$ est un *isomorphisme* entre le groupe additif $\mathbb{F}_2^n$ et le groupe de translations de l'espace $\mathbb{F}_2^n$. En effet, cette correspondance est bijective et transforme une somme de vecteurs en le produit (formé par composition) des translations correspondantes.

1.4. **Les matrices sur $\mathbb{F}_2$.** On considère les *matrices* $m \times n$ dont les coefficients sont $\bar{0}$ ou $\bar{1}$. On s'intéresse particulièrement ici à des matrices carrées 3×3 (donc, d'ordre 3) :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

où les a_{ij} appartiennent à $\mathbb{F}_2$. On peut additionner deux telles matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ d'une façon évidente : $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$. On note O la matrice nulle :

$$O = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix},$$

et l'on note par $E_{ij} = (a_{ij})$ la matrice dite 'élémentaire' dont $a_{ij} = \bar{1}$ et $a_{kl} = \bar{0}$ si $(k, l) \neq (i, j)$. Par exemple,

$$E_{21} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}.$$

On associe à une matrice A d'ordre 3 un certain vecteur $\vec{a}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{F}_2^9$:

$$A = (a_{ij}) \longmapsto \vec{a} = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}).$$

Lorsque $A = (a_{ij}) \longmapsto \vec{a}$ et $B = (b_{ij}) \longmapsto \vec{b}$ alors $A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \longmapsto \vec{a} + \vec{b}$. De même $O \longmapsto \vec{0}$, et les 9 matrices élémentaires correspondent aux 9 vecteurs de la base usuelle de $\mathbb{F}_2^9$:

$$E_{11} \longmapsto \vec{e}_1, \quad E_{12} \longmapsto \vec{e}_2, \quad \ldots, \quad E_{33} \longmapsto \vec{e}_9.$$

Ainsi toute matrice 3×3 $M = (m_{ij})$, où $m_{ij} \in \mathbb{F}_2$, se décompose de façon unique en somme de matrices élémentaires :

$$M = m_{11}E_{11} + \ldots + m_{33}E_{33}.$$

1.5. L'algèbre de matrices carrées. [1]

Les matrices carrées $n \times n$ (d'ordre n) sur le corps $\mathbb{F}_2$ forment un espace vectoriel de dimension n^2 dont la base usuelle est constituée des n^2 matrices élémentaires E_{ij}. Il existe une loi de multiplication pour ces matrices, ce qui permet de parler de l'*algèbre de matrices* $n \times n$ sur $\mathbb{F}_2$.

Pour introduire la multiplication de matrices, on rappelle d'abord que le *produit scalaire usuel* $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ de deux vecteurs $\vec{u} = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\vec{v} = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{F}_2^n$ est donné par la formule :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n.$$

Pour une matrice $A = (a_{ij})$ on note

$$\vec{a}_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1n}), \quad \vec{a}_2 = (a_{21}, \ldots, a_{2n}), \quad \ldots, \quad \vec{a}_n = (a_{n1}, \ldots, a_{nn})$$

les n *vecteurs-lignes* de A. On note par $A^t = (a_{ji})$ la *matrice transposée* obtenue à partir de A à l'aide de la symétrie par rapport à la diagonale principale $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$. Pour une matrice $B = (b_{ij})$ les n vecteurs-lignes

$$\vec{b}_1^t = (b_{11}, b_{21}, \ldots, b_{n1}), \quad \vec{b}_2^t = (b_{12}, b_{22}, \ldots, b_{n2}), \quad \ldots, \quad \vec{b}_n^t = (b_{1n}, b_{2n}, \ldots, b_{nn})$$

de la matrice transposée B^t correspondent aux n *vecteurs-colonnes* de B.

Pour deux vecteurs $\vec{u} = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\vec{v} = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{F}_2^n$, l'égalité $\vec{v}^t = A \cdot \vec{u}^t$ signifie que

$$y_i = \langle \vec{a}_i, \vec{u} \rangle \qquad \text{pour tout} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Tandis que $\vec{v} = \vec{u} \cdot B$ signifie que

$$y_j = \langle \vec{u}, \vec{b}_j^t \rangle \qquad \text{pour tout} \quad j = 1, \ldots, n.$$

[1] Lors d'une 1-ère lecture on pourra omettre les sections 1.5-1.7 car on en aura besoin que dans 2.4.

Le produit usuel $C = A \cdot B$ de matrices carrées d'ordre n est défini par $C = (c_{ij})$ où

$$c_{ij} = \langle \vec{a}_i, \vec{b}_j^t \rangle \qquad \text{pour tous} \quad i, j = 1, \dots, n\,.$$

Attention : En général, $AB \neq BA$, les autres propriétés usuelles de la multiplication restent valables.

1.6. **Le groupe des matrices inversibles.** On note I_n la *matrice unité d'ordre n*

$$I_n = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \dots & \bar{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{1} \end{pmatrix}.$$

On a : $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$ quelque soit la matrice carrée A d'ordre n. On dit que B est la *matrice inverse* de A, et on note $B = A^{-1}$, si $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Une matrice A qui possède un inverse A^{-1} est dite *inversible*. Le produit $A \cdot B$ de deux matrices inversibles A et B l'est encore et $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$. Ainsi les matrices $n \times n$ sur $\mathbb{F}_2$ inversibles forment un groupe multiplicatif (que l'on note $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_2)$).

Proposition 1.2. *Une matrice carrée A d'ordre n est inversible si et seulement si les n vecteurs-lignes $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ de A sont linéairement indépendants.*

Pour ceux qui connaissent déjà la notion de déterminant, voici un exercice :

Exercice 1.3. *Montrer qu'une matrice carrée A sur le corps $\mathbb{F}_2$ est inversible si et seulement si son déterminant est un entier impair.*

Une matrice carrée N d'ordre n est dite *nilpotente* si, pour un certain $m \in \mathbb{N}$, $N^m = O_n$ où l'on note par O_n la matrice nulle d'ordre n. Ici $N^0 = I_n$ et pour $m > 0$, $N^m = N \cdot N \cdot \ldots \cdot N$ (le produit de m facteurs). On vérifie sans peine que, si N est une matrice nilpotente d'ordre n, alors la matrice $I_n + N$ est inversible, d'inverse

$$(I_n + N)^{-1} = I_n + N + N^2 + \ldots + N^{m-1}\,.$$

Exemple 1.4. Les matrices d'ordre 4

$$N = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N' = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

sont nilpotentes, et $N^2 = N'^2 = O_4$. Ainsi les matrices

$$A = I_4 + N = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A' = I_4 + N' = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

sont inversibles, d'inverses respectifs

$$A^{-1} = I_4 + N = A \qquad \text{et} \qquad A'^{-1} = I_4 + N' = A'\,.$$

1.7. **La matrice de Gram d'une base.** Étant donnée une famille de n vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{F}_2^n$, la *matrice de Gram* $G = (g_{ij})$ de cette famille est la matrice carrée d'ordre n constituée des produits scalaires :

$$g_{ij} = \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle \, .$$

Autrement dit $G = V \cdot V^t$ où on note par V la matrice $n \times n$ ayant les vecteurs-lignes $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$. Une matrice de Gram G est *symétrique* : $G = G^t$. La matrice G est inversible si et seulement si la matrice V l'est. En effet, on a : $(V^t)^{-1} = (V^{-1})^t$, $G^{-1} = (V^t)^{-1} \cdot V^{-1}$ et $V^{-1} = V^t \cdot G^{-1}$. Ainsi G est inversible si et seulement si les vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ sont linéairement indépendents, c'est à dire s'ils forment une base de $\mathbb{F}_2^n$. Étant donné un vecteur $\vec{v}$ de $\mathbb{F}_2^n$ décomposé suivant cette base :

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + \ldots + a_n\vec{v}_n \, ,$$

la matrice de Gram G sert pour trouver le vecteur des coordonnées $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$. Tout d'abord, on considère les produits scalaires :

$$b_j = \langle \vec{v}, \vec{v}_j \rangle = a_1 \langle \vec{v}_1, \vec{v}_j \rangle + \ldots + a_n \langle \vec{v}_n, \vec{v}_j \rangle = a_1 g_{1j} + \ldots + a_n g_{nj} = \langle \vec{a}, \vec{g}_j^{\,t} \rangle \tag{1}$$

où $j = 1, \dots, n$ et $\vec{g}_1^{\,t}, \dots, \vec{g}_n^{\,t}$ sont les vecteurs-colonnes de G. Ainsi (1) s'écrit comme

$$\vec{a} \cdot G = \vec{b} \qquad \text{où} \qquad \vec{b} = (b_1, \dots, b_n) \, .$$

On peut donc calculer le vecteur $\vec{a}$ à partir du vecteur $\vec{b}$ et de l'inverse G^{-1} de la matrice de Gram G :

$$\vec{a} = \vec{b} \cdot G^{-1} \, . \tag{2}$$

2. Retour au jeu reversi

2.1. **Les matrices des coups.** Désormais nous identifions un damier 3×3 blanc-noir[2] avec la matrice 3×3 sur le corps $\mathbb{F}_2$, obtenue en remplaçant blanc par $\bar{0}$ et noir par $\bar{1}$. Nous introduisons les *matrices des coups* $C_{ij} = (a_{kl})$ où $a_{kl} = \bar{1}$ si les cases (k, l) et (i, j) sont voisines ou confondues et $a_{kl} = \bar{0}$ sinon. Par exemple,

$$C_{11} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} , \quad C_{12} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} , \quad C_{22} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix} , \quad \text{etc.}$$

Effectuer le coup correspondant à la case (i, j) sur un damier D de taille 3×3 M revient à faire la somme de la matrice C_{ij} et de la matrice M associée à D :

$$\text{le coup}\,(i, j) : M \longmapsto M + C_{ij} \, .$$

Par exemple, appliquer le coup centré en la case (i, j) à la matrice

$$O = O_3 = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

codant un damier 'tout blanc' redonne la matrice du coup C_{ij}.

[2]Nous utilisons ci-loin le terme 'damier' dans deux sens, soit vu comme ensemble de cases, soit pour désigner un damier bicoloré en blanc et noir, la distinction étant évidente en fonction du contexte.

Un damier (une matrice) M donné peut être transformé en un damier 'tout blanc' (en matrice nulle O) par une suite des n coups successifs indexés par les cases $(i_1 j_1)$, $(i_2 j_2)$, ..., $(i_n j_n)$ si et seulement si l'égalité ci-dessus est vérifiée :

$$M + C_{i_1 j_1} + C_{i_2 j_2} + \ldots + C_{i_n j_n} = O\,. \tag{3}$$

En utilisant l'égalité $M = -M$ on peut écrire (3) comme :

$$M = C_{i_1 j_1} + C_{i_2 j_2} + \ldots + C_{i_n j_n}\,. \tag{4}$$

Ainsi, *terminer le jeu à partir d'un damier M revient à trouver une décomposition de la matrice M en somme de certaines matrices de coups C_{ij}.*

2.2. **Le groupe du jeu.** D'après 2.1 on peut remplacer la matrice M (respectivement, C_{ij}) par le vecteur correspondent $\vec{u}$ (respectivement, $\vec{v}_{ij}$) de l'espace vectoriel $\mathbb{F}_2^9$. Par exemple,

$$C_{11} \longmapsto \vec{v}_{11} = (\bar{1}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \ldots, \bar{0}) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_4\,,$$
$$C_{12} \longmapsto \vec{v}_{12} = (\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \ldots, \bar{0}) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_5\,, \quad \text{etc.}$$

Ainsi jouer le coup centré dans la case (i, j) correspond à la translation de vecteur $\vec{v}_{ij}$:

$$\text{le coup}\,(i, j) : \vec{u} \longmapsto \vec{u} + \vec{v}_{ij}\,.$$

On constate que l'ordre dans lequel on joue deux coups successifs n'a pas d'importance car l'addition de vecteurs est commutative : $\vec{v}_{ij} + \vec{v}_{kl} = \vec{v}_{kl} + \vec{v}_{ij}$. Effectuer le coup dans la case (i, j) et ensuite un autre dans la case (k, l) conduit au même résultat que jouer d'abord le coup (k, l) suivi du coup (i, j). De même, faire un coup deux fois n'a pas d'intérêt puisque $\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}$ pour tout $\vec{v}$ dans $\mathbb{F}_2^9$.

Notre but est alors de trouver (si cela est possible) une décomposition d'un vecteur $\vec{u}$ donné suivant la famille des 9 *vecteurs-coups* $\vec{v}_{11}$, $\vec{v}_{12}$, ..., $\vec{v}_{33}$:

$$\vec{u} = \vec{v}_{i_1 j_1} + \vec{v}_{i_2 j_2} + \ldots + \vec{v}_{i_n j_n}\,.$$

Ces 9 vecteurs engendrent un sous-groupe de translations agissant sur l'espace affine $\mathbb{F}_2^9$. Lorsqu'on applique toutes les translations de ce sous-groupe au vecteur $\vec{0}$ correspondant à la matrice nulle 'toute blanche', on obtient tous les vecteurs (matrices, damiers) pour lesquels notre jeu admet une solution.

Ainsi, *pour gagner à partir de n'importe quel damier initial M il faut et il suffit que la famille des 9 vecteurs-coups forme une base de l'espace vectoriel* $\mathbb{F}_2^9$. D'après la proposition 1.1 ci-dessus, cela est vrai si et seulement si tout vecteur de la base usuelle $\vec{e}_{11}, \vec{e}_{12}, \ldots, \vec{e}_{33}$ peut s'écrire comme une somme de vecteurs-coups.

2.3. **Comment jouer ? Un premier algorithme.** Notre jeu possède beaucoup de symétries. Par exemple, il possède la symétrie rotationnelle qui consiste à faire tourner le damier d'un angle 90°, 180° ou 270° dans le sens trigonométrique. Si on peut gagner le jeu à partir du damier M, on peut aussi le réussir à partir du damier M tourné. En effet, si la matrice M est décomposée en somme de certaines matrices de coups C_{ij}, et si R désigne la rotation de 90°, alors la matrice tournée $R(M)$ est décomposable en somme de matrices de coups $R(C_{ij})$ où

$$R(C_{11}) = C_{31}, \quad R(C_{12}) = C_{21}, \quad R(C_{13}) = C_{11}, \quad \text{etc.}$$

En utilisant cette symétrie de rotation, il suffit de considérer les 3 matrices E_{11}, E_{12} et E_{22} pour montrer que toute matrice élémentaire E_{ij} est décomposable en somme de matrices de coups C_{kl} . Or on a les décompositions suivantes trouvées 'à la main' par les étudiants de la licence[3] :

$$E_{11} = C_{11} + C_{13} + C_{31} + C_{23} + C_{32}\,, \tag{5}$$
$$E_{12} = C_{22} + C_{31} + C_{32} + C_{33}\,, \tag{6}$$
$$E_{22} = C_{22} + C_{12} + C_{21} + C_{23} + C_{32}\,. \tag{7}$$

Ceci montre que *notre jeu reversi peut aboutir à partir de n'importe quel damier initial.* En effet, à l'aide des égalités (5)-(7) on exprime une matrice élémentaire E_{ij} arbitraire en termes de matrices de coups C_{kl}, en appliquant la symétrie de rotation convenable (ou bien la symétrie centrale, la symétrie par rapport à la 2-e colonne, la symétrie par rapport à la diagonale principale (a_{11}, a_{22}, a_{33}), etc.) :

$$E_{13} = C_{11} + C_{13} + C_{21} + C_{32} + C_{33}\,, \tag{8}$$
$$E_{31} = C_{11} + C_{12} + C_{23} + C_{31} + C_{33}\,, \tag{9}$$
$$E_{33} = C_{12} + C_{13} + C_{21} + C_{31} + C_{33}\,, \tag{10}$$
$$E_{21} = C_{22} + C_{13} + C_{23} + C_{33}\,, \tag{11}$$
$$E_{23} = C_{22} + C_{11} + C_{21} + C_{31}\,, \tag{12}$$
$$E_{32} = C_{22} + C_{11} + C_{12} + C_{13}\,. \tag{13}$$

Ceci donne une méthode qui permet de réussir à partir d'un damier M quelconque. En exprimant la matrice $M = (m_{ij})$ comme somme de matrices élémentaires E_{ij}, on substitue ensuite les matrices élémentaires E_{ij} contribuant à la somme par les expressions ci-dessus en termes de matrices de coups C_{kl}, voir (5)-(13). On simplifie (réduit) la décomposition obtenue de M en une somme de matrices de coups, et l'on arrive à une décomposition unique :

$$M = C_{i_1 j_1} + \ldots + C_{i_n j_n}$$

qui ne contient pas de répétions. On termine ainsi le jeu à partir du damier M en jouant les coups dans les cases $(i_1, j_1), \ldots, (i_n, j_n)$ où $0 \le n \le 9$.

Exemple 2.1. On veut transformer le damier M_0 ayant pour la matrice

$$M_0 = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

en le damier 'tout blanc'. On a :

$$M_0 = E_{22} + E_{23} + E_{32} + E_{33}\,.$$

La somme des 4 égalités (7), (10), (12) et (13) exprimant E_{22}, E_{23}, E_{32} et E_{33} en fonction des matrices de coups nous donne :

$$M_0 = C_{12} + C_{21} + C_{23} + C_{32} + C_{22} + C_{33}\,.$$

Ainsi pour aboutir à partir du damier M_0 il faut faire, dans un ordre quelconque, la suite des coups successifs dans les cases $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(2, 2)$ et $(3, 3)$. On s'aperçoit que la suite des coups possède les mêmes symétries que le damier de départ (il s'agit ici de la symétrie par rapport à la diagonale principale).

[3]Bien entendue, on peut le faire d'une façon standard qui épasse les cadres de ces notes.

2.4. **Le second algorithme.** Comme dans 1.4, nous considèrons ici les matrices carrées d'ordre 3 sur $\mathbb{F}_2$ comme des vecteurs dans $\mathbb{F}_2^9$. Ainsi pour deux matrices A, B leur produit scalaire $\langle A, B\rangle$ est défini comme le produit scalaire des vecteurs correspondants de $\mathbb{F}_2^9$. Pour trouver le vecteur de coordonées $\vec{a} = (a_{11}, \dots, a_{22})$ de $\mathbb{F}_2^9$ d'une matrice 3×3 quelconque M suivant la base des 9 matrices de coups :

$$C_{11}, C_{13}, C_{31}, C_{33}, \quad C_{12}, C_{21}, C_{23}, C_{32}, \quad C_{22}\,,$$

on utilise la matrice de Gram G correspondante à cette base (voir 1.7). Un calcul facile montre que cette matrice G est composée de blocs :

$$G = \begin{pmatrix} A & O & O \\ O & B & O \\ O & O & C \end{pmatrix} \qquad \text{où} \qquad A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix},$$

$C = I_1 = (\bar{1})$ et O désigne la matrice nulle rectangulaire dans la case correspondante. D'après l'exemple 1.4 on a $A^{-1} = A$. On voit aisment qu'encore $B^2 = I_4$ donc $B^{-1} = B$, $C^{-1} = C$ et alors $G^{-1} = G$. Ainsi on propose le *second algorithme* du jeu. Suivant 1.7, on calcule d'abord le vecteur $\vec{b} = (b_{11}, \dots, b_{22})$ où $b_{ij} = \langle M, C_{ij}\rangle$, ensuite le vecteur $\vec{a} = \vec{b} \cdot G$, et on obtient la décomposition

$$M = a_{11}C_{11} + a_{13}C_{13} + \ldots + a_{22}C_{22} = C_{i_1j_1} + \ldots + C_{i_nj_n}\,.$$

Ainsi, *le jeu reversi aboutit à partir du damier M lorsqu'on applique la suite de coups dans les cases (i_1, j_1), ..., (i_n, j_n) où $0 \le n \le 9$.*

Remarque. Il est commode d'écrire tout vecteur $\vec{v}$ de l'espace $\mathbb{F}_2^9$ comme $\vec{v} = (\vec{v}_A, \vec{v}_B, \vec{v}_C)$ suivant la décomposition en somme directe $\mathbb{F}_2^9 = \mathbb{F}_2^4 \oplus \mathbb{F}_2^4 \oplus \mathbb{F}_2^1$. En particulier, si $\vec{a} = (\vec{a}_A, \vec{a}_B, \vec{v}_C)$ et $\vec{b} = (\vec{b}_A, \vec{b}_B, \vec{b}_C)$ alors on a :

$$\vec{a}_A = \vec{b}_A \cdot A, \quad \vec{a}_B = \vec{b}_B \cdot B \quad \text{et} \quad \vec{a}_C = \vec{b}_C \cdot C = \vec{b}_C\,.$$

Exemple 2.2. Pour la matrice de l'exemple 2.1

$$M_0 = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

on trouve

$$\vec{b}_A = (\bar{0}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}), \quad \vec{b}_B = (\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}) \quad \text{et} \quad \vec{b}_C = (\bar{1})\,.$$

On obtient ainsi :

$$\vec{a}_A = \vec{b}_A \cdot A = (\bar{0}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}) \cdot \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} = (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{1})\,,$$

$$\vec{a}_B = \vec{b}_B \cdot B = (\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}) \cdot \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = (\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1})\,,$$

et $\vec{a}_C = \vec{b}_C = (\bar{1})$. Finalement $\vec{a} = (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1})$, c'est à dire

$$M_0 = C_{33} + C_{12} + C_{21} + C_{23} + C_{32} + C_{22}\,.$$

C'est la décomposition qu'on a déjà obtenue dans l'exemple 2.1 ci-dessus.

3. Le graphe du jeu reversi

Au total, il y a $2^9 = 512$ différents damiers 3×3 blanc-noir $M_1, \ldots, M_{512}$. Le *graphe de jeu reversi* est le graphe Γ ayant $M_1, \ldots, M_{512}$ pour sommets où l'on joint M_i et M_j par une arête $[M_i, M_j]$ si et seulement si M_j s'obtient à partir de M_i par un seul coup. Lorsqu'on applique ce même coup au damier M_j on revient à M_i. Donc la relation 'être voisin' est symétrique. D'après 2.3, en partant du damier tout blanc $M_1 = O$, on peut obtenir n'importe quel autre damier M_i. Ainsi notre graphe Γ est connexe. De plus, tout sommet M_i a exactement 9 voisins car les 9 coups différents appliqués à M_i donnent 9 résultats différents.

La distance $d(M_k, M_l)$ dans Γ entre deux sommets M_k et M_l est la longueur du plus court chemin qui amène du sommet M_k au sommet M_l. Ainsi la distance entre deux sommets voisins est 1. En outre $d(M_i, O) = m$ lorsque l'on peut aboutir à partir du damier M_i par m coups deux-à-deux distincts. Le *diamètre* de Γ est la distance maximale entre les sommets de Γ. Vous pouvez montrer sans peine que ce diamètre est ≤ 9.

On se pose la question : *Pour un entier m entre* 0 *et* 9 *donné, combien y a-t-il de sommets de Γ à distance m de O ?* Notons ce nombre par N_m. Alors $N_0 = 1$ et N_m est le nombre des matrices carrées M d'ordre 3 sur $\mathbb{F}_2$ qui se décompose en somme de m matrices de coups C_{ij} deux-à-deux distinctes. Le nombre des choix possibles de m matrices de coups parmi les 9 est $N_m = C_9^m = \frac{9!}{m!(9-m)!}$. Ceci est conforme à la formule de binôme

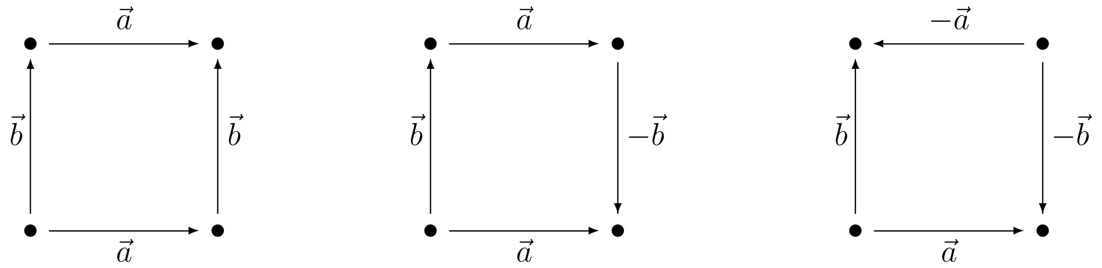
$$2^9 = 512 = 1 + C_9^1 + \ldots + C_9^8 + 1\,.$$

Exercice 3.1. *Trouver le sommet du graphe Γ le plus éloigné de O, c'est à dire le damier M pour lequel le jeu reversi nécessite le nombre maximal de coups ; quel est ce nombre ?*

4. Quelques généralisations

4.1. **Le jeu reversi sur quelques autres surfaces.** Bien entendue, on peut jouer le reversi sur un damier différent du damier carré 3×3. Par exemple, on peut jouer sur un damier rectangulaire $m \times n$, ou sur un damier circulaire, ou sur un damier triangulaire, ou sur un damier cubique $k \times m \times n$, etc. On va considérer ici quelques cas intéressants où le damier est tracé sur une surface fermée, c'est à dire sur une surface sans bord.

Il y a 3 telles surfaces qui s'obtiennent à partir d'un carré en identifiant ses côtés opposés en respectant ou en renversant l'orientation : le tore, la bouteille de Klein et le plan projectif. Pour obtenir le tore on respecte l'orientation, pour obtenir le plan projectif on la renverse, et pour obtenir la bouteille de Klein on respecte l'orientation pour une paire de côtés opposés, et on la renverse pour l'autre paire.



On peut faire ce recollement en deux étapes, en recollant d'abord un couple de côtés opposés et ensuite en recollant l'autre. Dans un premier temps, on obtient un cylindre si l'orientation de la première paire d'arêtes à été preservée. Sinon on obtient un ruban de Möbius. Lorsque on recolle les deux bords d'un cylindre vertical en respectant l'orientation (par exemple en recollant un point du bord inférieur avec le point du bord supérieur situé à sa verticale) on obtient un tore, tandis que l'on obtient une bouteille de Klein lorsqu'on recolle les bords en renversant l'orientation. Le plan projectif s'obtient en recollant le bord du carré en identifiant les couples de points opposés. Ces deux dernières surfaces ne sont pas réalisées comme surfaces lisses plongées dans $\mathbb{R}^3$, mais peuvent s'y immerger en autorisant des auto-sections. [4].

Si le carré de départ possède un carrelage 3×3, alors la surface obtenue hérite de ce carrelage. On obtient ainsi des damiers 3×3 sur le tore, la bouteille de Klein et le plan projectif. On peut donc jouer au reversi sur ces surfaces.

Ce qui est changé c'est les couples de cases voisines, c'est à dire la notion de voisinage (ou bien la *topologie*). On note par T_{ij} (respectivement, par K_{ij}, par P_{ij}) les matrices de coups sur un damier 3×3 torique (respectivement, sur la bouteille de Klein, sur le plan projectif). On a :

$$T_{11} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \qquad T_{12} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}, \qquad T_{21} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \qquad \text{etc.}$$

On voit que dans la matrice T_{ij}, les coefficients de la i^e ligne et de la j^e colonne sont $\bar{1}$ et que les autres sont $\bar{0}$. On a également

$$K_{11} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, \qquad K_{12} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}, \qquad K_{21} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \qquad \text{etc.,}$$

$$P_{11} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, \qquad P_{12} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}, \qquad P_{21} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \qquad \text{etc.}$$

[4]Pour de visualisation, visitez les sites web :
http : //www.bangor.ac.uk/cpm/sculmath/mb.htm,
http : //www.bangor.ac.uk/cpm/sculmath/plane.htm,
http : //mathforum.org/sum95/math_and/moebius/moebius.html,
http : //mathworld.wolfram.com/KleinBottle.html or
http : //www.kleinbottle.com/classicalklein.htm .

On trouve les relations suivantes :

$$T_{12} + T_{21} + T_{23} + T_{32} = O\,,$$
$$K_{11} + K_{21} + K_{31} + K_{22} = O\,,$$
$$P_{12} + P_{21} + P_{23} + P_{32} = O\,.$$

Dans les 3 cas, la décomposition en somme des matrices de coups n'est pas unique, car, par exemple,

$$T_{12} = T_{21} + T_{23} + T_{32}\,,$$
$$K_{11} = K_{21} + K_{31} + K_{22}\,,$$
$$P_{12} = P_{21} + P_{23} + P_{32}\,.$$

Ainsi ces matrices ne sont pas linéairement indépendantes, et elles ne forment donc pas une base de $\mathbb{F}_2^9$. On conclut que *le jeu reversi joué sur un damier* 3×3 *tracé sur une des* 3 *surfaces tore, bouteille de Klein et plan projectif, ne peut pas être gagné à partir de n'importe quel damier.* Cependant la matrice M_0 de l'exemple 2.1 se décompose comme :

$$M_0 = T_{12} + T_{13} = P_{12} + P_{13}\,.$$

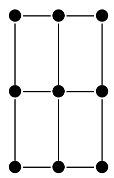
Ainsi, dans ces deux cas on peut aboutir à partir de M_0.

On peut également jouer au jeu reversi sur un polyèdre convexe quelconque P, en prenant comme cases l'ensemble de ses faces. (Cela correspond à un damier sur la sphère.)

Exercice 4.1. *Parmi les* 5 *polyèdres réguliers : tetraèdre, cube, octaèdre, icosaèdre, dodécaèdre, déterminer sur lesquels le jeu reversi aboutit à partir de bicoloration initiale quelconque.* [5]

4.2. **Le jeu reversi sur des graphes.** En toute généralité, étant donné un graphe fini Γ, on peut jouer au jeu reversi sur Γ, en prenant comme cases les sommets de Γ. Deux cases (deux sommets) a, b de Γ sont voisines si Γ possède l'arête $[a, b]$.

Par exemple, le graphe suivant (la grille 3×3)



correspond au damier carré 3×3.

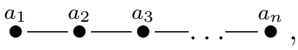
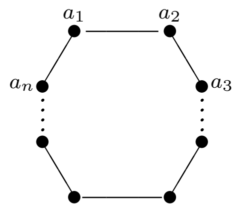
Étant donné un polyèdre convexe P, on peut lui associer son *graphe dual* $\Gamma_P^\vee$ dont les sommets correspondent aux faces de P, et les sommets voisins correspondent aux faces voisines (ainsi, les arêtes de $\Gamma_P^\vee$ correspondent aux arêtes de P). Donc jouer reversi sur P revient à jouer sur $\Gamma_P^\vee$.

En outre, les sommets et les arêtes de P forment de façon naturelle un graphe Γ_P sur lequel on peut aussi jouer au reversi.

Il n'existe pas beaucoup de résultats concernant le jeu reversi sur un graphe quelconque. En voici cependant un pour un graphe linéaire, et un autre pour un graphe cyclique.

[5] Voir la page web
http : //www.bymath.com/studyguide/geo/geo21.htm.

Exercice 4.2. *Étant donné un graphe linéaire (resp. cyclique) à n sommets*

L_n :  , C_n : 

montrer que le jeu reversi sur L_n (resp. sur C_n) aboutit à partir de toute bicoloration initiale des sommets de L_n (resp. de C_n) si et seulement si $n \neq 3k+2$ (resp. $n \neq 2$ et $n \neq 3k$).

Question : *Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles le jeu reversi sur un damier $n \times n$ carré aboutit à partir de toute bicoloration initiale ? Existe-t-il une infinité de telles valeurs ?* [6]

Il est vraisemblable que les graphes pour lesquels le jeu aboutit à partir de n'importe quel damier (bicoloration) initial sont relativement rares. Par exemple, si Γ_n est le graphe complet à n sommets (c'est à dire si tout deux sommets distincts a, b de Γ_n sont joint par une arête $[a, b]$ de Γ_n) alors tout coup renverse tous les jetons. Ainsi il n'y a qu'un seul coup qui transforme le damier blanc-noir donné M en damier 'opposé' en renversant tous les jetons. Donc, *le jeu reversi sur un graphe complet ne peut être gagné qu'à partir du damier M 'tout blanc' ou 'tout noir'.*

Voici deux résultats récents obtenue par Alexandre Aksenov, élève de la classe de 1-e en 2002-2003, de la terminale en 2003-2004 du lycée Cité Internationale de Grenoble. Le premier résultat dit que le jeu sur un damier $n \times n$ tracé sur le tore ou bien sur le plan, peut toujours réussir pour une infinité de valeurs de n. Cela répond donc à une des questions proposées ci-dessus. Le deuxième dit que, pour n'importe quel graphe Γ, on peut toujours renverser tous les jetons.

Exercice 4.3. *Montrer que, pour un damier 2×2 tracé sur le tore, le jeu toujours réussit.*

Théorème 1 d'Aksenov : *Si, pour m et n donnés, le jeu reversi réussit toujours sur un damier $m \times n$ tracé sur le tore, alors il réussit de même toujours sur un damier $2m \times 2n$ tracé sur le tore.*

Démonstration. Soit a_0 une case de ce dernier damier tôrique $2m \times 2n$. On note les cases autour de a_0 de la façon suivante :

a	b	a	b	a
c	d	c	d	c
a	b	a_0	b	a
c	d	c	d	c
a	b	a	b	a

[6]Pour quelques renseignements sur la question ci-dessus, visitez la site web d'Andries Brouwer *http : //www.win.tue.nl/ aeb/ca/madness/mad.html* .
Vous pouvez même jouer au reversi sur un damier 4×4 en cliquant sur
http : //www.win.tue.nl/ aeb/ca/madness/madness.html .

Cette notation se propage de façon double périodique, de période 2×2, sur tout le damier $2m \times 2n$. Lorsqu'on fait les coups en case initiale a_0 et en les 4 cases voisines b et c, on renverse les jetons dans la case a_0 et dans les 4 cases a à distance 2 de a_0, en préservant la couleur de tout autre jeton.

Si maintenant on 'oubli' toutes les cases b, c et d, on obtient, de façon évidente, un damier $m \times n$ tracé sur le tore, constitué des cases a. Notre suite de 5 coups sur l'ancien damier $2m \times 2n$ correspond alors à un seul coup en case a_0 sur ce nouveau damier. Puisque par l'hypothèse du théorème, le jeu sur ce nouveau damier réussit toujours, on peut, à partir d'une bicoloration de l'ancien damier, jouer de sorte que tous les jetons dans les cases a montrent leur côté blanc, tandis que les autres jetons ne soient pas renversés. Maintenant on effectue cette même opération avec les cases b, et ensuite avec les cases c et d. On arrive ainsi au damier tout blanc.

Corollaire 4.4. *Le jeu reversi sur un damier* $2^n \times 2^n$ *tracé sur le tore, et également sur un damier* $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ *tracé sur le plan, réussit toujours.*

Le cas du tore est laissé au lecteur. Le cas du plan sera démontrée dans la deuxième partie de ces notes.

Théorème 2 d'Aksenov : *Soit* Γ *un graphe fini. Étant donné une coloration quelconque de ces sommets en blanc et noir, on peut passer à la coloration opposée par une suite finie de coups.*

Désormais, on appelle un sommet a de Γ *pair* si le nombre de sommets voisins de a est pair, et *impair* dans le cas contraire. Notons par n le nombre total de sommets de Γ, par p le nombre de sommets pairs et par i le nombre de sommets impairs. Pour démontrer le théorème on a besoin du fait suivant.

Proposition 4.5. *Pour tout graphe fini* Γ*, le nombre* $i = n - p$ *de sommets impairs de* Γ *est pair. Par consequent,* n *et* p *ont la même parité.*

Démonstration. Soient $a_1, \ldots, a_n$ les sommets de Γ. Pour chaque sommet a_i, notons par v_i le nombre de sommets voisins de a_i. La somme $V = v_1 + \ldots + v_n$ est égale à $2A$, où A est le nombre d'arêtes de Γ. Donc cette somme est paire. Ainsi le nombre i des membres impairs de la somme $V = v_1 + \ldots + v_n$ est pair, d'où le résultat.

Démonstration du théorème. On procède par récurrence sur le nombre n de sommets de Γ. Notre assertion est évidemment vraie si Γ a un seul sommet. On suppose qu'elle est vraie pour tout graphe à n sommets. Soit Γ un graphe à $n+1 \geq 2$ sommets. On choisit un sommet quelconque a de Γ, et on note par Γ' le sous-graphe de Γ qui comprend les n sommets de Γ autres que a, et les arêtes qui les joignent. D'après l'hypothèse de récurrence, en jouant sur les sommets de Γ' on peut passer à la coloration opposée de Γ'. Si en même temps le jeton en a est renversé alors notre but est atteint.

Supposons que, quelque soit le choix de a, le jeton en a ne soit pas renversé. On choisit alors 2 sommets arbitraires a et b de Γ. D'après ce qui précéde, on peut renverser tous les jetons sauf celui en a, et après tous les jetons sauf celui en b. En faisant cela on renverse les jetons en a et en b et on préserve la couleur du jeton en tout sommet autre que a et b. Donc on peut tout renverser si le nombre $n + 1$ de sommets de Γ est pair.

Lorsque $n+1$ est impair on choisit pour a un sommet pair de Γ. D'après la proposition 4.5 ci-dessus, le nombre total de tels sommets dans Γ est impair et donc non-nul.

Lorsqu'on joue le coup en a, on renverse les jetons en a et en les sommets voisins. Donc on renverse un nombre impair de jetons, et le nombre de jetons restant immobile est pair car le nombre total des jetons est impair. Sous notre hypothèse, ceci nous permet comme ci-dessus, de renverser ensuite tous les autres jetons deux par deux. Finalement on a tout renversé. Ceci achève la récurrence.

Epiloge

J'ai rédigé ce texte sans régardér la bibliographie complète sur ce sujet. Depuis j'ai eu l'occasion de le faire, graçe à Silvain Gravier. Je me suis aperçu que la litérature est abondante, et que la régle considerée ici est celle d'un jeu commercialisé sous le nom "Lights Out" (voir le site http ://www.geocities.com/jaapsch/puzzles/lomath.htm). Voici quelques références utiles.

D. Pelletier, Merlin's magic square. Amer. Math. Monthly 94 (1987), 143–150.

K. Sutner, Linear cellular automata and the Garden-of-Eden. Math. Intelligencer 11 (1989), 49–53.

K. Sutner, The σ-game and cellular automata. Amer. Math. Monthly 97 (1990), 24–34.

D. L. Stock, Merlin's magic square revisited. Amer. Math. Monthly 96 (1989), 608–610.

Université Grenoble I, Institut Fourier, UMR 5582 CNRS-UJF, BP 74, 38402 St. Martin d'Hères cédex, France

E-mail address: zaidenbe@ujf-grenoble.fr