Théorie des jeux : Cours 3

Stratégies mixtes

`http://math.unice.fr/~ahrens`

On a vu que les jeux qui admettent une valeur en stratégie pure ne sont pas intéressants.

Considérons le jeu (X, Y, u) donné par sa forme normale

	y_1	y_2
x_1	1	-1
x_2	-1	2

Ce jeu n'admet pas de valeur en stratégie pure (le démontrer en exo), il n'y a donc pas de stratégies optimales.

1 Définition (Stratégie mixte): Une *stratégie mixte* pour le joueur X est une variable aléatoire dont les valeurs sont les stratégies $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de X (ici : x_1 et x_2). Au lieu de choisir *une* stratégie, le joueur X choisit une loi de probabilité pour l'ensemble de ses stratégies, c'est–à–dire il choisit une probabilité p_i pour chaqu'une de ses stratégies,

$$p_1, \ldots, p_n \quad \text{tel que} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \ .$$

Pour l'exemple, le joueur X va donc choisir une probabilité p avec laquelle il jouera x_1, et il jouera x_2 avec probabilité $1 - p$.

De son coté le joueur Y utilise aussi une stratégie mixte, c'est–à–dire il choisira de jouer la stratégie y_1 avec probabilité q et la stratégie y_2 avec probabilité $1 - q$.

Le joueur X cherche a minimiser le risque, c'est–à–dire il cherche a maximiser le gain minimal. On calcule alors son gain comme une moyenne pondérée, ou les poids sont donnés par les probabilités de ses stratégies : ici X gagne soit $p - (1 - p)$, soit $-p + 2(1 - p)$, selon la stratégie choisi par Y.

Pour minimiser le risque, joueur X doit donc choisir $p \in [0, 1]$ tel que le gain minimal

$$\min\{p - (1 - p), -p + 2(1 - p)\} = \min\{2p - 1, -3p + 2\}$$

devient le plus grand possible. Ainsi son gain minimal garanti est

$$\max_{p \in [0,1]} \Big(\min\{p - (1 - p), -p + 2(1 - p)\} \Big) = \frac{1}{5} \ ,$$

atteint pour $p = \frac{3}{5}$.

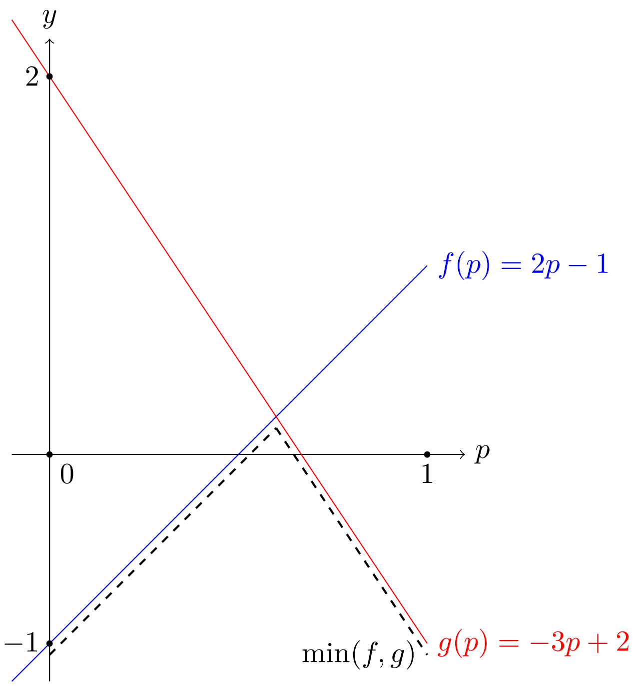

FIGURE 1: Gain pour chaqu'une des stratégies choisi par Y et leur minimum

2 Définition: On associe au jeu (X, Y, u) les ensembles des *stratégies mixtes*

$$X^m = \{x = (p_1, \dots, p_n), \quad p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\}$$

et

$$Y^m = \{y = (q_1, \dots, q_m), \quad q_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{m} q_k = 1\}$$

ensemble avec la fonction de paiement

$$u^m(x, y) = x^t \cdot u \cdot y \ .$$

On appelle le jeu ainsi obtenu le *prolongement mixte* du jeu initial.

Pour notre exemple, les stratégies mixtes sont alors

$$X^m = \{(p, 1-p) \mid 0 \leq p \leq 1\} \cong [0, 1]$$

et

$$Y^m = \{(q, 1-q) \mid 0 \leq q \leq 1\} \cong [0, 1] \ .$$

Autrement dit, une stratégie de X^m resp. Y^m consiste en choisisant une fréquence (probabilité) p resp. q pour la stratégie x_1 resp. y_1 du jeu original.

La fonction de paiement associée est

$$u^m(p,q)\begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} = (2p-1)q + (-3p+2)(1-q)$$

3 Remarque: On obtient donc un jeu (X^m, Y^m, u^m) avec des ensembles de stratégies *infinis.*

4 Théorème: *L'ensemble des points selles du prolongement mixte d'un jeu fini est convexe compact et* non vide. *Il contient l'ensemble (éventuellement vide) des points selles du jeu initial. La valeur du prolongement mixte de* (X^m, Y^m, u^m)*, encore appelée valeur mixte de u et notée* $\mathrm{val}_m(u)$*, verifie*

$$\max_i \min_k u(x_i, y_k) \leq \mathrm{val}_m(u) \leq \min_k \max_i u(x_i, y_k) \ .$$

En particulier, si u a une valeur, sa valeur mixte coincide avec celle de u.

Objectif : savoir repondre aux questions suivantes :

- Qu'est-ce que c'est, une stratégie mixte ? (def)
- Donner le prolongement mixte d'un jeu.