

Théorie des jeux : Cours 2

Points selles, Stratégies optimales

<http://math.unice.fr/~ahrens>

1 Définition (Point selle = Equilibre de Nash): On appelle *point selle* ou *équilibre de Nash* de la fonction

$$X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$$

un couple $(x^*, y^*) \in X \times Y$ tels que pour tout $x \in X$ et $y \in Y$

$$u(x, y^*) \leq u(x^*, y^*) \leq u(x^*, y) . \quad (1)$$

On appelle S l'ensemble des points selles d'un jeu.

2 Remarque: Soit le jeu (X, Y, u) donné par sa forme normale. Alors un coefficient de la matrice représentant du jeu est un point selle si et seulement si ce coefficient est *en même temps*

- le maximum de sa colonne *et*
- le minimum de sa ligne.

La signification d'un point selle est :

- si joueur X change sa stratégie de x^* vers une autre stratégie $x \in X$, pendant que Y reste sur y^* , alors joueur X gagnera moins ou pareil qu'avec la stratégie x^* , car

$$u(x, y^*) \leq u(x^*, y^*) ;$$

- si joueur Y change sa stratégie de y^* vers une autre stratégie $y \in Y$, pendant que X reste sur x^* , alors joueur Y gagnera moins ou pareil qu'avec la stratégie y^* , car

$$u(x^*, y^*) \leq u(x^*, y) .$$

(On rappelle que Y gagne plus quand u est plus petit.)

3 Théorème: *Un jeu ne possède pas nécessairement de point selle.*

Si le jeu (X, Y, u) possède au moins un point selle, c'est-à-dire si $S \neq \emptyset$, alors tous les points selles ont le même paiement.

Les points selles sont échangeables : pour tout $(x_1, y_1) \in S$ et $(x_2, y_2) \in S$, on a aussi

$$(x_1, y_2) \in S \quad \text{et} \quad (x_2, y_1) \in S .$$

Donc il existe un sous-ensemble O_X des stratégies de X et un sous-ensemble O_Y des stratégies de Y , appelés ensemble des stratégies optimales de respectivement, X et Y tels que

$$S = O_X \times O_Y .$$

4 Théorème: Si le jeu (X, Y, u) possède au moins un point selle, c'est-à-dire si $S \neq \emptyset$, alors le jeu admet une valeur en stratégie pure. Autrement dit, dans ce cas on a que

$$\text{Minmax} = \text{Maxmin} .$$

En plus, dans ce cas le paiement des points selles (qui est égal pour tous les points selles) est égal à la valeur Minmax du jeu.

5 Remarque: Le théorème précédent dit que, pour trouver les points selles, on peut procéder comme ci :

1. Déterminer la valeur du jeu $\text{val}(u)$ en stratégies pures.
 - Si le jeu n'a pas de valeur en stratégie pure, i.e. si $\text{Minmax} \neq \text{Maxmin}$, alors il n'y a pas de points selles.
 - Si le jeu admet une valeur en stratégie pure, i.e. si $\text{Minmax} = \text{Maxmin} := \text{val}(u)$, alors les candidats (x, y) possibles pour les points selles sont ceux avec $u(x, y) = \text{val}(u)$. Dans ce cas on continue avec l'étape suivant.
2. Pour tout point (x, y) avec $u(x, y) = \text{val}(u)$ on examine si la définition d'un point selle (1) est vérifiée. **Attention : Un point (x, y) avec $u(x, y) = \text{val}(u)$ n'est pas forcément un point selle. La vérification est nécessaire, cf. Exo 10.**

6 Théorème: Supposons que le jeu (X, Y, u) possède au moins un point selle, c'est-à-dire $S \neq \emptyset$. Alors une stratégie $\bar{x} \in X$ du joueur X est optimale ($\bar{x} \in O_X$) si et seulement si elle vérifie :

$$\min_{y \in Y} u(\bar{x}, y) = \text{val}(u) .$$

Une stratégie $x \in X$ n'est pas optimale si et seulement si

$$\min_{y \in Y} u(x, y) < \text{val}(u) . \quad (2)$$

De même, une stratégie $\bar{y} \in Y$ du joueur Y est optimale ($\bar{y} \in O_Y$) si et seulement si elle vérifie :

$$\max_{x \in X} u(x, \bar{y}) = \text{val}(u) .$$

Une stratégie $y \in Y$ n'est pas optimale si et seulement si

$$\max_{x \in X} u(x, \bar{y}) > \text{val}(u) . \quad (3)$$

7 Remarque: Le théorème 6 justifie de parler de stratégie optimale : en jouant une stratégie $x \in O_X$, le joueur X obtient un gain qui équivaut au moins la valeur $\text{val}(u)$ du jeu.

De même, en choisissant une stratégie optimale $y \in O_Y$ est sûr de ne pas perdre plus que la valeur $\text{val}(u)$ du jeu, i.e. il gagnera au moins $-\text{val}(u)$.

Si X choisit une stratégie non optimale, le joueur Y peut trouver une stratégie y tel que $u(x, y) < \text{val}(u)$ d'après la propriété (2), c-a-d. X risque de gagner moins que $\text{val}(u)$ (au cas ou Y anticipe l'erreur de X).

De même, si Y choisit une stratégie non optimale, le joueur X peut trouver une stratégie x tel que $u(x, y) > \text{val}(u)$ d'après la propriété (3), c-a-d. Y risque de perdre plus que $\text{val}(u)$ (au cas ou X anticipe l'erreur de Y).

8 Remarque: Si on suppose que X et Y sont des joueurs rationnels, ils vont chacun choisir des stratégies optimales et donc le gain correspondra forcément à la valeur en stratégie pure. Le jeu ne vaudra alors pas vraiment la peine d'être joué. Par contre, si vous décidez de jouer avec votre petit frère qui n'a pas assisté à ce cours, vous avez quand même des chances de gagner plus que la valeur en stratégie pure...

9 Exemple: Soit le jeu (X, Y, u) donné par sa forme normale

	y_1	y_2	y_3
x_1	-2	5	-3
x_2	-1	0	-1
x_3	-3	2	-2

Les stratégies optimales du joueur X , c'est $O_X = \{x_2\}$. Les stratégies optimales du joueur Y , c'est $O_Y = \{y_1, y_3\}$.

10 Exercice: Soit le jeu (X, Y, u) donné par sa forme normale

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	-1	1	1	-1
x_2	-2	-3	2	2
x_3	-2	1	-2	1
x_4	-1	-3	4	1

Ce jeu admet-il une valeur en stratégie pure? Calculer les points selles du jeu. Montrer que (x_1, y_4) et (x_4, y_1) ne sont pas des points selles. Quelles sont les stratégies optimales de X et Y ?

Objectif : savoir répondre aux questions suivantes :

Etant donné le jeu (X, Y, u) ,

- qu'est-ce que c'est, un point selle? (def)
- trouver les points selle du jeu. (exo)
- donner une propriété rigolote des points selle d'un jeu. (thm)
- qu'est-ce que c'est, une stratégie optimale du joueur X ? (def)
- trouver les stratégies optimales du jeu. (exo)