

Théorie des jeux : Cours 1

Jeux à somme nulle, Valeur d'un jeu

<http://math.unice.fr/~ahrens>

- 1 Définition** (Jeu à somme nulle): Un *jeu à somme nulle* est la donnée de
- un ensemble $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ de *stratégies* — qu'on appellera les stratégies du joueur X
 - un ensemble $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ de *stratégies* — qu'on appellera les stratégies du joueur Y
 - une fonction $X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ qui à toute paire de stratégies $(x, y) \in X \times Y$ associe le paiement $r \in \mathbb{R}$ que le joueur Y payera à X .

Un tel jeu s'appelle *jeu à somme nulle* car la perte d'un joueur équivaut toujours au gain de l'autre, c'est-à-dire la somme des gain des deux joueurs est nulle.

2 Définition (Forme normale d'un jeu à somme nulle): Etant donné le jeu (X, Y, u) , on représente les n stratégies de X en ligne et les m stratégies de Y en colonne, et donc obtient un tableau, par exemple :

	y_1	y_2	y_3
x_1	-2	+1	-1
x_2	-2	-4	+1

qu'on appelle la *forme normale* du jeu (X, Y, u) .

Vu que les coefficients $u(x, y)$ de la matrice correspondent au gain de X — et donc à la perte de Y — le joueur X essaie de maximiser $u(x, y)$, pendant que Y essaie de le minimiser. Plus précisément, pour chaque stratégie x_i que le joueur X peut choisir, le joueur Y essaie de choisir la stratégie y_j qui minimise $\{u(x_i, y_j) \mid 1 \leq j \leq m\}$.

On raisonne en terme de *risque* : chaque joueur réfléchit sur le risque de perte pour chacune des stratégies à sa disposition. Pour l'exemple précédent :

	y_1	y_2	y_3	min -	Maxmin
x_1	-2	+1	-1	-2	-2
x_2	-2	-4	+1	-4	
max	-2	+1	+1		
Minmax		-2			

Joueur Y risque de perdre -2 (i.e. gagner 2) en choisissant y_1 , perdre $+1$ en choisissant y_2 (si X choisit x_1), et $+1$ en choisissant y_3 . Joueur X risque de gagner -2 (i.e. perdre 2) en choisissant x_1 (si Y choisit y_1), et perdre 4 en choisissant x_2 (si Y choisit y_2).

3 Définition: On appelle

$$\text{Maxmin} = -2$$

le max de la dernière colonne, qui est le Max des minima de chacune des lignes.

De même, on appelle

$$\text{Minmax} = -2$$

le min de la dernière ligne, qui est le Min des maxima de chacune des lignes.

4 Définition (Jeu à stratégie pure): Si pour un jeu (X, Y, u) on a $\text{Minmax} = \text{Maxmin}$, on dit que le jeu *admet une valeur en stratégie pure*.

Dans ce cas, on appelle Minmax *la valeur du jeu*.

Le jeu de l'exemple en haut admet une valeur en stratégie pure.

5 Exercice: Modifier l'exemple de Déf. 2 tel que le jeu n'admette plus une valeur en stratégie pure.

But : savoir répondre à

- Qu'est-ce qu'un jeu ?
- Qu'est-ce que la forme normale d'un jeu, et comment l'interpréter ?
- Étant donné un jeu sous forme normale, admet-il une valeur en stratégie pure ?