Cours de Théorie des Jeux
L3 MIDO
Version partielle et provisoire

Guillaume Vigeral

27 février 2012

Table des matières

Introduction

La théorie des jeux peut être définie comme l'étude mathématiques des **interactions stratégiques** entre plusieurs agents **rationnels**. Les mots important sont dans cette définition sont :

- Interaction : il y a plusieurs agents (appelés aussi joueurs, "decision makers", etc...), et ils interagissent : le contentement (appelé aussi paiement, gain, utilité, bien-être) de chacun ne dépend pas que de lui, mais aussi en partie des autres.
- Stratégique : Les joueurs ont le choix entre plusieurs options.
- Rationnel : un joueur ne joue pas n'importe comment, il cherche à optimiser son paiement.

Historiquement, la théorie des jeux est née à la frontière des mathématiques et de l'économie, et s'est ensuite développée dans ces deux domaines, tout en trouvant d'autres champs d'applications notamment en biologie (dynamique des populations), et plus récemment en informatique (cryptographie, théorie algorithmique des jeux, vérification de preuve,...)

Les questions principales sont de plusieurs ordres :

- Comment modéliser mathématiquement des interactions "réelles" ?
- Que peut on dire mathématiquement de ces modèles ? Quels sont les bons concepts de "solutions" et sous quelle hypothèse ces solutions ont elles de bonne propriété (existence, unicité, etc...) ?
- Discussion de la pertinence de ces concepts mathématiques de "solutions" dans le monde réel.

Étant donné qu'il s'agit d'un cours de mathématiques, l'accent sera mis ici principalement sur le deuxième point, mais on discutera aussi des deux autres.

Ci dessous quelques exemples de situations rencontrées dans la vie de tous les jours qui correspondent à la définition d'un "jeu" :

- Un couple qui se rend au cinéma et doit décider du film à aller voir, sachant qu'ils préfèrent assister à la même séance mais n'ont pas les mêmes préférences sur le film. Par contre si un célibataire se rend au cinéma et doit décider du film, ce n'est pas un jeu (pas d'interaction) mais un problème d'optimisation ; et si 2 personnes inconnues l'une de l'autre se demandent au même moment quel film aller voir ce n'est pas non plus un jeu (toujours pas d'interaction) mais deux problèmes d'optimisation en parallèle.
- Lors d'un départ en vacances, le temps de trajet dépend de votre stratégie (choix de la route, heure de départ) mais surtout de ce que font les autres ! Pour cette raison pour un trajet donné vous ne prenez pas forcément le même chemin un jour de semaine et le week end du 15 août.

- Quand un piéton pressé traverse une rue, son utilité (réussir à traverser vite en un seul morceau) dépend de sa stratégie (prudente ou non) mais également de ce que font les automobilistes. Pour cette raison, le piéton va chercher à anticiper le comportement des automobilistes (quelle est la probabilité qu'ils soient ivres, est-on dans un pays ou les gens respectent le code de la route, etc...)
- Lors d'une élection, le résultat du scrutin dépend du vote de tous les électeurs. Cela entraîne des considérations stratégiques comme le "vote utile".
- Lors d'enchères, le fait que l'on gagne ou non un objet (et le prix à payer) dépend aussi des enchères des autres. Cela entraîne là encore des considérations stratégiques.

On voit dans ces exemples apparaître plusieurs concepts centraux de la théorie des jeux : caractère simultané ou non des décisions des joueurs, importance de l'information (exemple : Bison futé), anticipation des stratégies que vont utiliser les autres joueurs,...

Le plan du cours est le suivant. La première partie concerne les jeux dits "sous forme normale", dans lesquels les joueurs prennent chacun une seule décision, et ce indépendamment les uns des autres. On introduira dans cette partie deux notions fondamentales en théorie des jeux : la *valeur* (dans le cas de jeux à somme nulle) et les *équilibres de Nash* (dans le cas général). Dans la seconde partie nous étudierons les jeux dits "sous forme extensive" dans lesquels apparait une structure dynamique : les joueurs peuvent jouer plusieurs fois, les uns après les autres,etc. On verra l'importance de l'*information* des joueurs sur les coups précédents des autres et on introduira les notions d*équilibres sous-jeux parfaits* et d'*équilibres Bayesien parfaits*. La troisième partie est composée de deux chapitres de compléments qui portent respectivement sur les *jeux répétés* et les *équilibres corrélés*.

Première partie

Jeux sous forme normale

Un jeu sous forme normale (on dit aussi forme stratégique) est un jeu dans lequel les joueurs jouent chacun une seule fois, et de manière simultanée (ou, ce qui revient au même, de manière indépendante). Une sous classe particulièrement intéressante est celle des jeux dans lesquels il n'y a que deux joueurs, qui ont des intérêts opposés. Ces jeux, appelés jeux à deux joueurs et à somme nulle (ou juste jeux à somme nulle) seront étudiés dans le premier chapitre, avant de passer au cas général dans le second.

Chapitre 1

Jeux à deux joueurs et à somme nulle

1.1 Jeux à somme nulle en stratégies pures

1.1.1 Modèle

Formellement, un jeu à deux joueurs et à somme nulle est un triplet $\Gamma = (A, B, g)$ où

- A est un ensemble non vide appelé ensemble d'actions (ou de stratégies) du joueur 1 (parfois noté J_1).
- B est un ensemble non vide appelé ensemble d'actions (ou de stratégies) du joueur 2 (parfois noté J_2).
- $g : A \times B \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée qu'on appelle fonction de paiement du jeu (ou fonction de gain, fonction d'utilité). Le joueur 1 cherche à la maximiser et le joueur 2 à la minimiser.

Ceci modélise l'interaction stratégique suivante : J_1 et J_2 choisissent simultanément (sans savoir ce que fait l'autre) $a \in A$ et $b \in B$ respectivement. Les actions sont ensuite révélées, et le paiement est $g(a, b)$. Ce paiement modélise le contentement du joueur 1 et le mécontentement du joueur 2 : J_1 veut que $g(a, b)$ soit le plus élevé possible et J_2 veut qu'il soit le plus bas possible. L'interprétation la plus classique est que $g(a, b)$ est la quantité d'argent que J_2 doit à J_1 (ou l'inverse si $g(a, b)$ est négatif). D'autres interprétations sont possibles : g peut être vue comme l'espérance de vie qu'un lapin chassé veut maximiser (alors que le renard veut la minimiser), la probabilité de marquer un but que le tireur veut maximiser (et que le gardien veut minimiser), etc...

Remarque 1.1.1 *Dans le cas particulier où B est un singleton on est juste en présence d'un problème de maximisation. Et quand A est un singleton on est juste en présence d'un problème de minimisation.*

Si A et B sont des ensembles finis on parle de jeu fini (ou jeu matriciel), qu'on représente habituellement sous forme de matrice. Le joueur 1 choisit une ligne, le joueur 2 une colonne, et le paiement correspondant est dans la case à l'intersection de cette ligne et cette colonne.

Exemple 1.1.2 *Jeu du penalty*[1]

1. Ce jeu est plus connu dans la littérature sous le nom de "matching pennies"

Lors d'une séance de tir au but, le tireur (J_1) doit décider de tirer à gauche[2] *ou à droite et le gardien (J_2) doit décider de sauter à gauche ou à droite. Les deux joueurs sont supposés excellents : le tireur cadre toujours son tir, et le gardien arrête toujours le tir s'il part du bon côté. Évidemment le tireur cherche à maximiser la probabilité qu'il y ait un but, et le gardien veut la minimiser. On peut modéliser une telle séance de tir au but par le jeu matriciel suivant :*

	S_g	S_d
T_g	0	1
T_d	1	0

Exemple 1.1.3 *Jeu du penalty avec tireur moins bon d'un côté.*

Même exemple mais le tireur ne tire pas très bien à gauche. S'il tire à gauche, et même si le gardien part du mauvais côté, il y a une chance sur deux que le tir soit raté et sorte du cadre. Cela correspond au jeu suivant :

	S_g	S_d
T_g	0	1/2
T_d	1	0

Exemple 1.1.4 *Jeu du penalty avec gardien manchot.*

Pareil que l'exemple 1.1.2 mais le gardien a un bras en moins : il ne peut pas arrêter les tirs à gauche quoi qu'il fasse. Il est toujours très bon par contre pour les tirs à droite. Cela correspond au jeu suivant :

	S_g	S_d
T_g	1	1
T_d	1	0

Exemple 1.1.5 *Jeu du penalty avec tir puissant.*

Pareil que l'exemple 1.1.2 mais le tireur a une option supplémentaire : il peut faire un tir puissant qui a deux chance sur trois de sortir du cadre, mais n'est jamais arrêté. Cela correspond au jeu suivant :

	S_g	S_d
T_g	0	1
T_d	1	0
T_p	1/3	1/3

Des questions naturelles sont

- Quelles actions doivent jouer les joueurs ?
- A quel point le jeu est il favorable à chaque joueur ? Dans les exemples ci dessus, peut on dire que certains jeux sont plus favorables pour J_1 que d'autres ?
- Plus précisément, quelle est la "valeur" du jeu ? Dans les exemples précédents, supposons que le gardien donne 1 euro au tireur si celui ci marque. Dans chaque exemple, y a t-il une quantité v telle qu'il soit équitable que J_2 donne v euros à J_1 plutôt que de jouer ? Autrement dit, quel est le paiement attendu "si les joueurs jouent bien" ?

2. dans tous les exemples et que ce soit le tireur ou le gardien qui prenne une décision, "gauche" veut toujours dire "à la gauche du but quand on est face au but"

1.1.2 Valeur en stratégies pures

Définition 1.1.6 *Le* supinf *en stratégies pures du jeu Γ, noté $\underline{v}(\Gamma)$ (ou simplement $\underline{v}$ quand il n'y a pas d'ambiguité sur le jeu joué) est la quantité*

$$\underline{v} = \sup_{a\in A}\left(\inf_{b\in B} g(a,b)\right).$$

*Lorsque le sup et l'*inf *sont atteint dans la définition (par exemple si le jeu est fini), $\underline{v}$ est également appelé* maxmin *du jeu.*

supinf $\underline{v}$ représente le paiement maximal que J_1 peut s'assurer quelque soit l'action de J_2. La caractérisation suivante de $\underline{v}$ se vérifie facilement en utilisant la définition du sup et de l' inf :

Proposition 1.1.7 *$\underline{v}$ est caractérisé par*

$$\begin{cases} \text{"}J_1 \textit{ garantit } \underline{v} \textit{ à } \varepsilon \textit{ près" :} & \forall\varepsilon>0,\ \exists a\in A,\ \forall b\in B,\ g(a,b)\geq \underline{v}-\varepsilon \\ \text{"}J_2 \textit{ défend } \underline{v} \textit{ à } \varepsilon \textit{ près" :} & \forall\varepsilon>0,\ \forall a\in A,\ \exists b\in B,\ g(a,b)\leq \underline{v}+\varepsilon \end{cases}$$

Quand il y a un maxmin *(par exemple si le jeu est fini), ces inégalités sont vraies pour $\varepsilon = 0$.*

Interprétation : $\underline{v}$ est la "valeur" du jeu dans lequel le joueur 1 choisit d'abord son action a, qui est annoncée à J_2, celui-ci choisissant alors son action b *en fonction* de a.

De manière symétrique,

Définition 1.1.8 *L'* infsup *en stratégies pures du jeu Γ, noté $\overline{v}(\Gamma)$ (ou simplement $\overline{v}$ quand il n'y a pas d'ambiguité sur le jeu joué) est la quantité*

$$\overline{v} = \inf_{b\in B}\left(\sup_{a\in A} g(a,b)\right).$$

*Lorsque le sup et l'*inf *sont atteint dans la définition (par exemple si le jeu est fini), $\overline{v}$ est également appelé* minmax *du jeu.*

L' infsup $\overline{v}$ représente le paiement minimal[3] que J_2 peut assurer quelque soit l'action de J_1.

Proposition 1.1.9 *$\underline{v}$ est caractérisé par*

$$\begin{cases} \text{"}J_2 \textit{ garantit } \overline{v} \textit{ à } \varepsilon \textit{ près" :} & \forall\varepsilon>0,\ \exists b\in B,\ \forall a\in A,\ g(a,b)\leq \overline{v}+\varepsilon \\ \text{"}J_1 \textit{ défend } \overline{v} \textit{ à } \varepsilon \textit{ près" :} & \forall\varepsilon>0,\ \forall b\in B,\ \exists a\in A,\ g(a,b)\geq \overline{v}-\varepsilon \end{cases}$$

Quand il y a un minmax *(par exemple si le jeu est fini), ces inégalités sont vraies pour $\varepsilon = 0$.*

3. on rappelle que J_2 cherche à minimiser le paiement

De même, $\underline{v}$ est la "valeur" du jeu dans lequel le joueur 2 choisit d'abord son action b, qui est annoncée à J_1, celui-ci choisissant alors son action a *en fonction* de b.

Exercice 1.1.10 *Calculer le* maxmin *et le* minmax *dans les quatre exemples précédents.*

L'interprétation ci-dessus de $\underline{v}$ et $\overline{v}$ laisse à penser qu'on devrait avoir $\underline{v} \leq \underline{v}$, puisqu'il est plus avantageux de jouer en sachant ce que va faire son adversaire. En effet,

Proposition 1.1.11 *Pour tout jeu,* $\underline{v} \leq \overline{v}$.

Démonstration. Pour tout $a \in A$ et $b \in B$, on a $g(a,b) \leq \underset{a' \in A}{sup} g(a', b)$. En fixant a et en prenant l'infimum sur b de cette inégalité, on trouve

$$\inf_{b \in B} g(a,b) \leq \inf_{b \in B} \left(\sup_{a' \in A} g(a', b) \right) = \overline{v}.$$

Puisque ceci est vrai pour tout $a \in A$, en prenant le sup sur a de cette inégalité on trouve

$$\underline{v} = \sup_{a \in A} \left(\inf_{b \in B} g(a,b) \right) \leq \overline{v}.$$

■

Définition 1.1.12 *Si* $\underline{v} \leq \overline{v}$*, on dit que le jeu a une valeur* v *en stratégies pures, avec* $v = \underline{v} \leq \overline{v}$.

Autrement dit, le jeu a une valeur v si chaque joueur peut garantir v (à ε près) quelque soit ce que fait l'autre. Si les joueurs "jouent bien", le résultat devrait être v.

Exercice 1.1.13 *Parmi les quatre exemples précédents, lesquels ont une valeur en stratégies pures ?*

1.1.3 Stratégies optimales

On va définir rigoureusement la notion de "bien jouer" dont on a parlé de façon informelle précédemment.

Définition 1.1.14 *Pour* $\varepsilon \geq 0$*, on dit que* $a \in A$ *est* ε*-optimale pour* J_1 *si* a *lui garantit* $\underline{v} - \varepsilon$ *c'est à dire si*

$$\forall b \in B, \;\; g(a,b) \geq \underline{v} - \varepsilon.$$

Symétriquement, on dit que $b \in B$ *est* ε*-optimale pour* J_2 *si* a *lui garantit* $\underline{v} + \varepsilon$ *c'est à dire si*

$$\forall a \in A, \;\; g(a,b) \leq \overline{v} + \varepsilon.$$

D'après la proposition 1.1.7, pour $\varepsilon > 0$ il existe toujours une stratégie ε-optimale pour J_1, et c'est la même chose pour J_2 . Il n'existe pas nécessairement de stratégie 0-optimale [4] en général, mais il en existe forcément dès que les sup et inf sont atteints (par exemple si le jeu est fini).

4. on écrira parfois simplement "optimale" au lieu de "0-optimale"

Définition 1.1.15 *Un couple de stratégies $(a^*, b^*) \in A \times B$ est un point selle si*

$$\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ g(a, b^*) \leq g(a^*, b^*) \leq g(a^*, b).$$

Interprétation : aucun des deux joueurs n'a de déviation profitable.

Proposition 1.1.16 *S'il existe un point selle (a^*, b^*) alors le jeu a une valeur, a^* et b^* sont des stratégies optimales, et $v = g(a^*, b^*)$.*

Démonstration. On a $g(a^*, b^*) \geq g(a, b^*)$ pour tout $a \in A$, donc

$$\begin{aligned} g(a^*, b^*) &\geq \sup_{a \in A} g(a, b^*) \\ &\geq \inf_{b \in B} \left(\sup_{a \in A} g(a, b) \right) \\ &= \overline{v}. \end{aligned}$$

Symétriquement, $g(a^*, b^*) \leq \underline{v}$. Or $\underline{v} \leq \overline{v}$ d'après la proposition 1.1.11, donc le jeu possède une valeur et $v = g(a^*, b^*)$. De plus pour tout $b \in B$, $g(a^*, b) \geq g(a^*, b^*) = v$ donc a^* est optimale, et symétriquement b^* est optimale. ■

On peut également prouver une réciproque :

Proposition 1.1.17 *Si un jeu a une valeur v, et si a^* et b^* sont des stratégies optimales, alors (a^*, b^*) est un point selle et $v = g(a^*, b^*)$.*

Démonstration. Puisque le jeu a une valeur et comme a^* est optimale, $g(a^*, b) \geq v$ pour tout b, et en particulier $g(a^*, b^*) \geq v$. Symétriquement $g(a^*, b^*) \leq v$ donc $g(a^*, b^*) = v$. En remplaçant v par $g(a^*, b^*)$ dans les définitions d'optimalité de a^* et b^* on retrouve alors la définition d'un point selle. ■

Remarque 1.1.18 *L'intérêt des deux propositions ci-dessus est qu'elles relient une propriété jointe (être un point selle) à des propriétés unilatérales (être une stratégie optimale). On verra dans le chapitre suivant que quand on sort du cadre particulier des jeux à somme nulle une telle correspondance est impossible.*

Puisqu'un jeu fini possède toujours des stratégies optimales, un jeu fini a une valeur si et seulement si il a un point selle. Attention, en général un jeu peut avoir une valeur sans avoir de stratégies optimales et donc de point selle (voir TD).

Exercice 1.1.19 *Trouver toutes les stratégies optimales de chaque joueur ainsi que tous les points selles dans les 4 exemples précédents.*

1.1.4 Quelques propriétés

On énonce ici quelques propriétés de la fonction valeur ; les démonstrations sont faciles et laissées en exercice au lecteur. Soient $\Gamma = (A, B, g)$ et $\Gamma' = (A', B', g')$ deux jeux à somme nulle, alors

– "Invariance par ajout d'une constante". Supposons que $A = A'$, $B = B'$, et qu'il existe $C \in \mathbb{R}$, $g'(a,b) = g(a,b) + C$ pour tout a et b.
  Alors $\overline{v}(\Gamma') = \overline{v}(\Gamma) + C$, $\underline{v}(\Gamma') = \underline{v}(\Gamma) + C$, et les stratégies optimales (ou ε-optimales) sont les mêmes dans les deux jeux.
– "Invariance par changement d'échelle". Supposons que $A = A'$, $B = B'$, et qu'il existe $C > 0$, $g'(a,b) = Cg(a,b)$ pour tout a et b.
  Alors $\overline{v}(\Gamma') = C\overline{v}(\Gamma)$, $\underline{v}(\Gamma') = C\underline{v}(\Gamma)$, et les stratégies optimales (ou ε-optimales) sont les mêmes dans les deux jeux.
– "Monotonie". Supposons que $A = A'$, $B = B'$, et que $g(a,b) \leq g'(a,b)$ pour tout a et b. Alors $\overline{v}(\Gamma) \leq \overline{v}(\Gamma')$ et $\underline{v}(\Gamma) \leq \underline{v}(\Gamma')$.
– "Abondance de stratégies ne nuit pas". On suppose $A \subset A'$, $B = B'$, et $g = g'_{|A\times B}$.
  Alors $\overline{v}(\Gamma) \leq \overline{v}(\Gamma')$ et $\underline{v}(\Gamma) \leq \underline{v}(\Gamma')$.

Exercice 1.1.20 *Se convaincre de l'inportance de $C > 0$ dans la propriété d'invariance par changement d'échelle.*

1.1.5 Stratégies dominées

Définition 1.1.21 *$a' \in A$ est strictement(ou fortement) dominée par $a \in A$ si pour toute stratégie $b \in B$ du second joueur, $g(a',b) < g(a,b)$.*

$a' \in A$ est faiblement dominée par $a \in A$ si pour toute stratégie $b \in B$ du second joueur, $g(a',b) \leq g(a,b)$ et si il existe une stratégie $b \in B$ telle que $g(a',b) < g(a,b)$.

Autrement dit : une stratégie a' est strictement dominée par a si a' est toujours strictement moins bonne que a. Elle est faiblement dominée si elle ne fait jamais strictement mieux, et fait parfois moins bien. Bien sûr une stratégie strictement dominée est faiblement dominée, mais l'inverse n'est pas forcément vrai.

On définit symétriquement le concept de stratégies dominées pour le second joueur 2 (il faut bien sûr renverser les inégalités).

Proposition 1.1.22 *Soit $\Gamma = (A, B, g)$, soit $a' \in A$ une stratégie faiblement dominée et soit Γ' le jeu $(A \setminus \{a'\}, B, g)$ dans lequel on a éliminé la stratégie a'. Alors $\overline{v}(\Gamma') = \overline{v}(\Gamma)$ et $\underline{v}(\Gamma') = \underline{v}(\Gamma)$. Si de plus a' est strictement dominée et que le* maxmin *existe (par exemple si le jeu est fini) alors a' n'est pas optimale dans Γ.*

Démonstration. Supposons que a' est faiblement dominée par a et soit Γ'' le jeu où l'on a remplacé l'action a' par l'action a. . La propriété de monotonie entraîne que $\overline{v}(\Gamma) \leq \overline{v}(\Gamma'')$ et $\underline{v}(\Gamma) \leq \underline{v}(\Gamma'')$, tandis que la propriété "Abondance de stratégies ne nuit pas" implique $\overline{v}(\Gamma') \leq \overline{v}(\Gamma)$ et $\underline{v}(\Gamma') \leq \underline{v}(\Gamma)$. Mais le jeu Γ'' est juste le jeu Γ' avec l'action a dédoublée, donc on a clairement $\overline{v}(\Gamma') = \overline{v}(\Gamma'')$ et $\underline{v}(\Gamma') = \underline{v}(\Gamma'')$ d,où la première assertion.

Supposons maintenant que a' est strictement dominée par a. Si le jeu admet un maxmin on peut prendre $\varepsilon = 0$ dans la proposition 1.1.7 ce qui nous donne un $b \in B$ tel que $g(a,b) \leq \underline{v}(\Gamma)$. On a donc $g(a',b) < \underline{v}(\Gamma)$ et a' n'est pas optimale. ■

Remarque 1.1.23 *Pour un exemple de jeu infini avec une stratégie strictement dominée mais optimale, voir TD*

Cette proposition permet de pratiquer ce que l'on appelle l'"itération de l'élimination des stratégies dominées". Quand on cherche la valeur d'un jeu, on peut éliminer les stratégies faiblement dominées d'un joueur sans changer la valeur du jeu. Après avoir éliminé ces stratégies, certaines stratégies de l'autre joueur peuvent devenir faiblement dominées à leur tour et ainsi de suite. Quand on cherche à la fois la valeur et toutes les stratégies optimales d'un jeu fini, on peut faire de même mais on n'a le droit d'éliminer que les stratégies strictement dominées.

Exercice 1.1.24 *Trouver toutes les stratégies faiblement ou strictement dominée dans les 4 exemples. Trouver dans un de ces exemples une stratégie faiblement dominée mais optimale.*

1.1.6 Un résultat général d'existence

On donne ci-dessous, sans la démonstration (qui est difficile) un résultat d'existence de la valeur en stratégies pures sous des hypothèses assez générales.

Théorème 1.1.25 (Sion, 1958) *Soit $\Gamma = (A, B, g)$ un jeu à somme nulle, on suppose que*

- *A et B sont des compacts convexes non vides.*
- *Pour tout $b \in B$, la fonction $a \to g(a, b)$ est concave semi continue supérieurement.*
- *Pour tout $a \in A$, la fonction $b \to g(a, b)$ est convexe semi continue inférieurement.*

Alors le jeu Γ a une valeur en stratégies pures et chaque joueur a des stratégies optimales.

Ce théorème ne s'applique pas dans le cas d'un jeu fini (A et B ne sont pas convexes) ce qui n'est pas surprenant puisqu'on a vu des exemples de jeux finis sans valeur.

1.2 Jeux à somme nulle en stratégies mixtes

Comme on l'a vu dans les exemples de la section précédente, des jeux très simples peuvent ne pas avoir de valeur en stratégies pures. Pour remédier à cela on va dans cette section permettre aux joueurs de choisir *aléatoirement*, selon la probabilité qu'il souhaite, l'action qu'ils vont jouer. Sauf mention explicite du contraire, tous les jeux considérés dans cette section sont des jeux finis.

1.2.1 Modèle

Soit donc $\Gamma = (A, B, g)$ un jeu avec A et B finis, de cardinaux k et l respectivement. On note $X = \Delta(A)$ l'ensemble des stratégies mixtes sur A :

$$X = \{x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_k a_k,\ x_i \geq 0\ \forall i, x_1 + \cdots + x_k = 1\}$$

Remarque 1.2.1 *On identifiera souvent $\Delta(A)$ à*

$$\Delta_k := \{(x_1, x_2, \cdots, x_k),\ x_i \geq 0\ \forall i, x_1 + \cdots + x_k = 1\}.$$

Remarque 1.2.2 *On vérifie que $A \subset \Delta(A)$: toute stratégie pure est aussi une stratégie mixte. D'autre part il est facile de démontrer que $\Delta(A)$ est un sous-ensemble compact convexe de $\mathbb{R}^k$.*

On définit de la même manière $Y = \Delta(B)$ l'ensemble des stratégies mixtes sur A.

Interprétation de la stratégie mixte $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_k a_k$: le premier joueur tire au hasard, selon la probabilité $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$, l'action qu'il va jouer.

On étend bilinéairement [5] la fonction g à $X \times Y$:

$$g(x,y) = \sum_{i,j} x_i y_j g(a_i, b_j)$$

Remarque 1.2.3 *En particulier $g(a,y) = \sum_j y_j g(a, b_j)$ et $g(x,b) = \sum_i x_i g(a_i, b)$*

Interprétation : g représente l'espérance de gain lorsque les stratégies mixtes x et y sont jouées.

Définition 1.2.4 *L'extension mixte de Γ est le jeu $\Gamma_\Delta = (X, Y, g)$.*

Interprétation : les joueurs ont le droit de choisir aléatoirement leur action, et cherchent à maximiser (ou minimiser) l'espérance de gain.

Remarque 1.2.5 *Nous ferons toujours implicitement cette hypothèse d'utilité linéaire mais il faut avoir conscience qu'elle n'est pas toujours vérifiée en pratique. Si lors d'un tir au but il semble assez juste que les joueurs cherchent à maximiser (ou minimiser) la probabilité que le but soit marqué, les gens sont rarement indifférents entre les deux événements "gagner à coup sûr dix millions d'euros" et "avoir une chance sur deux de gagner 20 millions d'euros" !*

1.2.2 Valeur en stratégies mixtes

Définition 1.2.6 *Le* maxmin *de Γ en stratégies mixtes est $\underline{V}(\Gamma) = \underline{v}(\Gamma_\Delta)$. De même le* minmax *de Γ en stratégies mixtes est $\overline{V}(\Gamma) = \overline{v}(\Gamma_\Delta)$. Si $\underline{V}(\Gamma) = \overline{V}(\Gamma)$ on dit que le jeu Γ a une valeur $V(\Gamma)$ en stratégies mixtes, avec $V(\Gamma) = \underline{V}(\Gamma) = \overline{V}(\Gamma)$.*

Remarque 1.2.7 *On peut bien parler de* maxmin *et de* minmax *puisque X et Y sont compacts et g est continue.*

Exercice 1.2.8 *Deviner la valeur et une stratégie optimale pour chaque joueur dans l'exemple 1.1.2.*

Deux questions naturelles sont :

– Un jeu qui a une valeur en stratégie pure la garde t-il en stratégie mixte ?

– Les jeux ont ils tous une valeur en stratégie mixte ?

Nous allons maintenant répondre à ces deux questions. Commençons par un lemme :

5. par abus de notation on notera g à la fois la fonction de départ et son extension bilinéaire

Lemme 1.2.9 $\overline{V} = \min_{y\in\Delta(B)} \max_{a\in A} g(a,y)$.

Démonstration. Par définition $\overline{V} = \min_{y\in\Delta(B)} \max_{x\in\Delta(A)} g(x,y)$; il suffit donc de montrer que pour tout y, $\max_{a\in A} g(a,y) = \max_{x\in\Delta(A)} g(x,y)$. Il est clair que $\max_{a\in A} g(a,y) \leq \max_{x\in\Delta(A)} g(x,y)$ puisque $A \subset \Delta(A)$. D'autre part, pour tout $x \in \Delta(A)$,

$$\begin{aligned}
g(x,y) &= \sum_{i,j} x_i y_j g(a_i, b_j) \\
&= \sum_i x_i g(a_i, y) \\
&\leq \sum_i x_i \max_{a_i\in A} g(a_i, y) \\
&= \max_{a\in A} g(a,y).
\end{aligned}$$

donc $\max_{x\in\Delta(A)} g(x,y) \leq \max_{a\in A} g(a,y)$ ■

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 1.2.10 *On a pour tout jeu fini* Γ *les inégalités*

$$\underline{v}(\Gamma) \leq \underline{V}(\Gamma) \leq \overline{V}(\Gamma) \leq \overline{v}(\Gamma).$$

avec comme corollaire immédiat

Corollaire 1.2.11 *Si un jeu fini a une valeur en stratégies pures, alors il a une valeur en stratégies mixtes, et* $V = v$.

Démonstration de la proposition 1.2.10. Puisque par définition $\underline{V}(\Gamma) = \underline{v}(\Gamma_\Delta)$ et $\overline{V}(\Gamma) = \overline{v}(\Gamma_\Delta)$, la proposition 1.1.11 entraîne que $\underline{V}(\Gamma) \leq \overline{V}(\Gamma)$.

D'autre part, d'après le lemme 1.2.9,

$$\begin{aligned}
\overline{V}(\Gamma) &= \min_{y\in\Delta(B)} \max_{a\in A} g(a,y) \\
&\leq \min_{b\in B} \max_{a\in A} g(a,b) \\
&= \overline{v}(\Gamma).
\end{aligned}$$

On montre de la même manière que $\underline{v}(\Gamma) \leq \underline{V}(\Gamma)$. ■

1.2.3 Théorème du minimax

On répond maintenant à la deuxième question :

Théorème 1.2.12 (Théorème du minimax, von Neumann, 1928) *Tout jeu fini a une valeur en stratégies mixtes.*

Démonstration. Soit Γ un jeu fini, on suppose par l'absurde qu'il n'a pas de valeur en stratégies mixtes, et donc que $\underline{V} \leq \overline{V}$ d'après la proposition 1.2.10. Soit $r \in \mathbb{R}$ tel que $\underline{V} < r < \overline{V}$ et soit

$$\begin{aligned} E &= \{(e_1, \cdots, e_k) \in \mathbb{R}^k,\ \exists y \in Y,\ e_i \geq g(a_i, y)\ \forall i\} \\ &= \{(e_1, \cdots, e_k) \in \mathbb{R}^k,\ \exists y \in Y,\ \exists d \in \mathbb{R}^k,\ e_i = d_i + g(a_i, y)\ \forall i\} \end{aligned}$$

On montre que E est fermé : soit $e^n = (e_1^n, \cdots, e_k^n$ une suite de E convergeant vers $e = (e_1, \cdots, e_k)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe y^n tel que

$$e_1^n \geq g(a_1, y_n); \cdots; e_k^n \geq g(a_k, y_n).$$

Puisque Y est compact il existe une extraction φ telle que $y^{\varphi(n)}$ converge vers $y \in Y$, et en faisant tendre n vers $+\infty$ on trouve alors

$$e_1 \geq g(a_1, y); \cdots; e_k \geq g(a_k, y).$$

et donc $e \in E$.

E est également convexe : supposons que $e = (e_1, \cdots, e_k)$ et $e' = (e'_1, \cdots, e'_k)$ sont des éléments de E :

$$\begin{aligned} e_i &\geq g(a_i, y)\ \forall i \\ e'_i &\geq g(a_i, y')\ \forall i \end{aligned}$$

alors par linéarité de g, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$te_i + (1-t)e'_i \geq g\left(a_i, ty + (1-t)y'\right)\ \forall i$$

et donc $te + (1-t)e' \in E$.

Par définition J_1 peut défendre $\overline{V}$ (en stratégies mixtes), autrement dit :

$$\forall y \in Y,\ \exists a \in A, g(a_i, y) \geq \overline{V}.$$

Puisque par hypothèse $r < \overline{V}$,

$$\forall y \in Y,\ \exists a \in A, g(a_i, y) > r$$

ce qui revient à dire que le vecteur $w := (r, \cdots, r)$ n'est pas dans E.

E et $\{w\}$ sont donc deux compacts convexes non vides de $\mathbb{R}^k$, et leur intersection est vide. D'après le théorème de séparation de Hahn-Banach, il existe un vecteur u non nul de $\mathbb{R}^k$ tel que

$$\langle u, w \rangle \leq \langle u, e \rangle\ \forall e \in E.$$

On a donc trouvé un vecteur non nul u tel que pour tout $y \in Y$, et pour tout $(d_1, \cdots, d_k) \in [0, +\infty[^k$,

$$r \sum_{i=1}^{k} u_i \leq \sum_{i=1}^{k} u_i(g(a_i, y) + d_i). \tag{1.2.1}$$

En faisant tendre d_i vers $+\infty$ dans (1.2.1), on trouve $u_i \geq 0$. Puisque u n'est pas le vecteur nul, $\sum_{i=1}^k u_i > 0$. En prenant $d_i = 0$ pour tout i dans (1.2.1), on trouve donc que pour tout $y \in Y$,

$$\begin{aligned} r &\leq \sum_{i=1}^{k} \frac{u_i}{u_1 + \cdots + u_k} g(a_i, y) \\ &= g\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{u_i}{u_1 + \cdots + u_k} a_i, y\right) \text{ par linéarité.} \end{aligned}$$

Posons $x = \sum_{i=1}^k \frac{u_i}{u_1+\cdots+u_k} a_i$, on vérifie facilement que $x \in \Delta(A)$. On vient de montrer que $r \leq g(x, y)$ pour tout $y \in Y$: J_1 peut garantir r et donc $r \geq \underline{V}$ d'où la contradiction. ■

1.2.4 Propriétés des stratégies optimales

Proposition 1.2.13 *Les propriétés suivantes sont vraies.*

a) Tout jeu fini admet un point selle (en stratégies mixtes) : $\exists (x^*, y^*) \in X \times Y$ *tel que*

$$g(x, y^*) \leq g(x^*, y^*) \leq g(x^*, y) \; \forall x \in X, \;\; \forall y \in Y.$$

b) Tout point selle vérifie $g(x^*, y^*) = V$.

c) (x^*, y^*) *est un point selle si et seulement si*

$$g(a, y^*) \leq g(x^*, y^*) \leq g(x^*, b) \; \forall a \in A, \;\; \forall b \in B.$$

d) Si (x^*, y^*) *est un couple de stratégies optimales, et si* $x_i^* > 0$, *alors* $g(a_i, y^*) = V$.

e) Si (x^*, y^*) *est un couple de stratégies optimales, et si* $x_i^* > 0$ *et* $x_j^* > 0$, *alors* $g(a_i, y^*) = g(a_j, y^*)$.

Démonstration. a) et b) sont des conséquences directes du théorème du minimax et de la proposition 1.1.17 appliquée à Γ_Δ.

Le c) vient du fait, vu dans la preuve du lemme 1.2.9, que $\max_{a \in A} g(a, y^*) = \max_{x \in \Delta(A)} g(x, y^*)$ (et une égalité similaire pour x^*).

Pour démontrer d), supposons que $g(a_i, y^*) \neq V$, puisque y^* est optimale on a nécessairement $g(a_i, y^*) < V$. Et, toujours d'après l'optimalité de y^*, $g(a_j, y^*) \leq V$ pour $j \neq i$. On a donc par linéarité

$$\begin{aligned} g(x^*, y^*) &= g\left(\sum_{j=1}^{k} x_j^* a_j, y^*\right) \\ &= \sum_{j=1}^{k} x_j^* g(a_j, y^*) \\ &< \sum_{j=1}^{k} x_j^* V \text{ puisque } x_i^* > 0 \\ &= V \end{aligned}$$

ce qui contredit le b).

Le e) est une conséquence triviale du d). ∎

Les deux dernières propriétés sont en particulier très utiles pour trouver la valeur et les stratégies optimales de jeux simples.

Exercice 1.2.14 *Grâce à la propriété e) de la proposition 1.2.13, déterminer la valeur (en stratégies mixtes) et toutes les stratégies optimales des deux joueurs dans l'exemple 1.1.3.*

1.2.5 Stratégies dominées par une stratégie mixte

De manière naturelle, on définit, comme dans la sous-section 1.1.5, les concepts de stratégies strictement et faiblement dominées dans l'extension mixte Γ_Δ. On peut évidemment appliquer la proposition 1.1.22 à l'extension mixte d'un jeu : si une stratégie mixte est strictement dominée par une autre, alors elle n'est pas optimale dans l'extension mixte. Cependant, puisqu'il y a une infinité de stratégies mixtes, il n'est pas très pratique des les éliminer "une à la fois". La proposition suivante permet d'éliminer une infinité de stratégies mixtes d'un coup lorsqu'une stratégie pure est dominée par une stratégie mixte.

Proposition 1.2.15 *Supposons la stratégie pure $a_i \in A$ dominée strictement par la stratégie mixte $\tilde{x} \in X$:*

$$g(a_i, y) \leq g(x, y) \ \forall y \in Y.$$

Alors le jeu Γ et le jeu $\Gamma' = (A \setminus a_i, B, g)$ dans lequel on a éliminé l'action pure a_i ont la même valeur en stratégies mixtes, et les mêmes stratégies optimales.

Démonstration. On remarque facilement que l'extension mixte de Γ' est le jeu $\Gamma'' = (\Delta(A) \setminus Z, Y, g)$ où Z est l'ensemble des stratégies mixtes de J_1 telle que $x_i > 0$. D'après la proposition 1.1.22 appliquée à Γ_Δ, il suffit donc de montrer que tout élément de Z est strictement dominée dans le jeu Γ_Δ. Soit donc $x \in Z$ et soit $x' = x_i\tilde{x}_i a_i + \sum_{j\neq i}(x_j + x_i\tilde{x}_j)a_j$. Alors

$$\begin{aligned}
g(x', y) &= x_i\tilde{x}_i g(a_i, y) + \sum_{j\neq i}(x_j + x_i\tilde{x}_j)g(a_j, y) \\
&= x_i\tilde{x}_i g(a_i, y) + \sum_{j\neq i} x_j g(a_j, y) + x_i \sum_{j\neq i} \tilde{x}_j)g(a_j, y) \\
&= \sum_{j\neq i} x_j g(a_j, y) + x_i g(\tilde{x}, y) \\
&> \sum_{j\neq i} x_j g(a_j, y) + x_i g(a_i, y) \\
&= g(x, y).
\end{aligned}$$

∎

SI $a_i \in A$ est supposée seulement faiblement dominée, alors la même démonstration montre que Γ' a même valeur en stratégies mixtes que Γ. Par contre les stratégies optimales ne sont pas nécessairement les mêmes dans les deux jeux : dans Γ il peut y avoir des stratégies optimales avec un poids non nul sur a_i.

Exercice 1.2.16 *Trouver la valeur en stratégies mixtes et les stratégies optimales de chaque joueur dans l'exemple 1.1.5*

1.2.6 Cas d'ensembles d'actions infinis

Dans cette sous-section on s'intéresse brièvement au cas d'un jeu plus général : $\Gamma = (A, B, g)$ où A et B ne sont pas nécessairement finis. On suppose désormais que A et B sont des compacts d'un ensemble euclidien, et que la fonction de paiement g est mesurable (pour la tribu borelienne produit) et bornée.

On définit alors $X = \Delta(A)$ et $Y = \Delta(B)$ comme l'ensemble des mesures de probabilité sur A et B (munies de la tribu borelienne) respectivement. Les hypothèses faites sur g permettent d'appliquer le théorème de Fubini pour définir l'extension mixte de g [6] :

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \int_{A\times B} g(a,b)x\otimes y(da,db) \\ &= \int_A \left(\int_B g(a,b)y(db)\right) x(da) \\ &= \int_B \left(\int_A g(a,b)x(da)\right) y(db). \end{aligned}$$

Comme dans le cas fini, on défini alors $\Gamma_\Delta = (X, Y, g)$; $\underline{V}(\Gamma) = \underline{v}\,(\Gamma_\Delta)$; etc...

Le résultat suivant d'existence est une généralisation dans ce cadre du théorème de von Neumann :

Théorème 1.2.17 *Sous les hypothèses de cette sous-section, on suppose également que*

- *pour tout b, la fonction $a \to g(a,b)$ est semi continue supérieurement*
- *pour tout a, la fonction $b \to g(a,b)$ est semi continue inférieurement.*

Alors Γ a une valeur en stratégies mixtes et des stratégies optimales. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, chaque joueur a une stratégie ε-optimale a support fini.

Démonstration. Conséquence du théorème de Sion. ■

6. que l'on note toujours g

Chapitre 2

Jeux à n joueurs

Dans ce chapitre on considère le cadre plus vaste des jeux à n joueurs ; on va voir que certaines notions du chapitre précédent peuvent se généraliser et d'autres non. Comme dans le chapitre précédent, on commencera par étudier le cas des jeux en stratégies pures avant de s'intéresser aux stratégies mixtes.

2.1 Jeux en stratégies pures

2.1.1 Modèle

Formellement, un jeu sous forme normale $\Gamma = \left(N, (A^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N}\right)$ est la donnée

- d'un ensemble de joueurs N, que l'on supposera toujours fini. Par abus de notation on notera également N son cardinal ;
- de N ensembles non vides A^i, A^i étant l'ensembles d'actions du joueur i [1] ;
- de N fonctions bornées $g^i : \Pi_{j\in N} A^j \to \mathbb{R}$, g^i étant la fonction de paiement du joueur i.

Interprétation : chaque joueur joue une fois, et indépendamment des autres, en choisissant une stratégie dans son ensemble d'actions. Il cherche à maximiser sa fonction de paiement qui ne dépend pas uniquement de son choix, mais aussi de celui des autres. On verra plus loin que pour que les concepts mathématiques que l'on va définir fassent sens d'un point de vue pratique, il faut généralement supposer de plus que chaque joueur connait le jeu, est rationnel, sait que tout le monde est rationnel, sait que tout le monde sait que tout le monde est rationnel, et ainsi de suite.

Remarque 2.1.1 *Dans le cas particulier où il n'y a que deux joueurs ($N = 2$) et où la somme des deux fonctions de paiement est nulle ($g^1(a^1, a^2) + g^2(a^1, a^2) = 0$ pour toutes actions $a^1 \in A^1$ et $a^2 \in A^2$), maximiser g^2 revient à minimiser g^1. Par conséquent le jeu sous forme normale $\Gamma = \left(\{1, 2\}, (A^i)_{i=1,2}, (g^i)_{i=1,2}\right)$ n'est autre que le jeu à deux joueurs et à somme nulle (A^1, A^2, g^1).*

Quelques notations et définitions : $A := \Pi_{i\in N} A^i$ est l'ensemble des actions jointes (ou profils d'actions) ; on notera $a = (a^1, \cdots, a^N)$ un tel profil. Pour tout $i \in N$, $A^{-i} :=$

1. on respectera la convention de toujours mettre le numéro du joueur en exposant et non en indice

$\Pi_{j \in N, j \neq i} A^j$ est l'ensemble des profils d'actions des joueurs autres que i ; on notera a^{-i} un tel profil.

2.1.2 Exemples

Lorsque $N = 2$ et A^1 et A^2 sont des ensembles finis, on peut représenter le jeu par une matrice comme dans le cas d'un jeu à somme nulle ; la différence étant qu'il faut écrire dans chaque case de la matrice à chaque fois le paiement du joueur 1 et celui du joueur 2.

Exemple 2.1.2 *La guerre des sexes.*

Amandine et Bernard doivent décider de manière indépendante s'ils vont voir un match de Football ou à l'Opéra. Ils sont amoureux transis et l'objectif principal de chacun est donc de retrouver l'autre : s'ils ne font pas le même choix ils ont tous deux une utilité de 0. Amandine préfère le Foot à l'Opéra : son utilité est de 2 si elle va au Foot avec Bernard, et de 1 s'ils vont à l'Opéra. Bernard a des préférences inverses. Le jeu se met sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} F^B & O^B \end{array} \\ \begin{array}{c} F^A \\ O^A \end{array} & \begin{pmatrix} 2,1 & 0,0 \\ 0,0 & 1,2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple 2.1.3 *La guerre des sexes avec préférence commune.*

Même situation que dans l'exemple précédent mais Bernard et Amandine préfèrent tous les deux le Foot.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} F^B & O^B \end{array} \\ \begin{array}{c} F^A \\ O^A \end{array} & \begin{pmatrix} 2,2 & 0,0 \\ 0,0 & 1,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple 2.1.4 *La guerre des sexes avec préférence commune et très marquée.*

Même situation que dans l'exemple précédent mais Bernard et Amandine n'aiment vraiment pas l'Opéra.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} F^B & O^B \end{array} \\ \begin{array}{c} F^A \\ O^A \end{array} & \begin{pmatrix} 2,2 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple 2.1.5 *La guerre des sexes avec amour non réciproque.*

Les paiements de Bernard sont les mêmes que dans l'exemple 2.1.2 mais désormais on suppose qu'Amandine est indifférente à ce que fait Bernard : son paiement est de 2 si elle va au Foot, et de 1 à l'Opéra.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} F^B & O^B \end{array} \\ \begin{array}{c} F^A \\ O^A \end{array} & \begin{pmatrix} 2,1 & 2,0 \\ 1,0 & 1,2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple 2.1.6 *La guerre des sexes avec amour/haine.*

Les paiements de Bernard sont les mêmes que dans l'exemple 2.1.2 mais Amandine commence à en avoir vraiment assez de voir Bernard : son paiement est de 0 si elle se trouve avec lui.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} F^B & O^B \end{array} \\ \begin{array}{c} F^A \\ O^A \end{array} & \begin{pmatrix} 0,1 & 2,0 \\ 1,0 & 0,2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple 2.1.7 *Dilemme du prisonnier.*

Pour financer leurs nombreuses activités culturelles des exemples précédents, Amandine et Bernard ont fait un braquage qui a mal tourné et se retrouvent en cellule en attendant leur jugement. Ils doivent choisir chacun simultanément soit de se Taire, soit de Dénoncer leur complice. S'ils se taisent tous les deux les juges ne peuvent rien prouver et ils prennent chacun juste une peine de six mois de prison pour port d'arme (utilité de 3). Si chacun dénonce l'autre, ils prennent tous deux 5 ans de prison (utilité de 1). Si un seul dénonce l'autre, il est récompensé en étant libéré sur le champ pour sa coopération avec la justice (utilité de 4) tandis que son complice prend une peine de 8 ans de prison (utilité de 0).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} T^B & D^B \end{array} \\ \begin{array}{c} T^A \\ D^A \end{array} & \begin{pmatrix} 3,3 & 0,4 \\ 4,0 & 1,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple 2.1.8 *Dilemme du prisonnier avec mesures de rétorsion.*

Même situation que dans l'exemple précédent mais les gens qui dénoncent s'expose à de menus désagréments à leur sortie... Si l'un (ou les deux) dénonce son complice il a une utilité de 2 de moins par rapport à l'exemple précédent.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} T^B & D^B \end{array} \\ \begin{array}{c} T^A \\ D^A \end{array} & \begin{pmatrix} 3,3 & 0,2 \\ 2,0 & -1,-1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Quand il y a 3 joueurs, on peut représenter le jeu de manière similaire mais il y a 3 paiements par case (celui de chaque joueur) et il y a plusieurs matrices (le joueur 3 choisit la matrice).

Exemple 2.1.9 *Jeu de minorité*

Amandine, Bernard et Camille choisissent simultanément de réviser à la Bibliothèque ou dans la salle Informatique. Si quelqu'un est tout seul il peut réviser (utilité de 1), sinon il est distrait et n'y arrive pas (utilité de 0).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B^B & I^B \end{array} \\ \begin{array}{c} B^A \\ I^A \end{array} & \begin{pmatrix} 0,0,0 & 0,1,0 \\ 1,0,0 & 0,0,1 \end{pmatrix} \\ & B^C \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B^B & I^B \end{array} \\ \begin{array}{c} B^A \\ I^A \end{array} & \begin{pmatrix} 0,0,1 & 1,0,0 \\ 0,1,0 & 0,0,0 \end{pmatrix} \\ & I^C \end{array}$$

2.1.3 Équilibres en stratégies dominantes

Comme pour les jeux à somme nulle, on dira que
- $b^i \in A^i$ est strictement (ou fortement) dominée par $a^i \in A^i$ si pour tout profil de stratégie des autres joueurs $a^{-i} \in A^{-i}$, $g^i(b^i, a^{-i}) < g^i(a^i, a^{-i})$.
- $b^i \in A^i$ est faiblement dominée par $a^i \in A^i$ si pour toute profil de stratégie des autres joueurs $a^{-i} \in A^{-i}$, $g^i(b^i, a^{-i}) \leq g^i(a^i, a^{-i})$ et pour un profil des autres joueurs, $g^i(b^i, a^{-i}) < g^i(a^i, a^{-i})$.

La notion suivante est également très importante :

Définition 2.1.10 *La stratégie $a^i \in A^i$ est une meilleure réponse du joueur i au profil de stratégie des autres joueurs $a^i \in A^i$ si pour toute autre stratégie $b^i \in A^i$, $g^i(b^i, a^{-i}) \leq g^i(a^i, a^{-i})$, c'est à dire si*

$$g^i(a^i, a^{-i}) = \max_{b^i \in A^i} g^i(b^i, a^i)$$

Si le jeu est fini il y a toujours au moins une meilleure réponse à un profil donné mais il n'y a aucune raison pour qu'il y en ait une seule. Une stratégie d'un joueur est dite dominante si elle est toujours meilleure réponse, ou, ce qui est équivalent, si elle domine faiblement toutes les autres [2] stratégies :

Définition 2.1.11 *La stratégie $a^i \in A^i$ est dominante si $g^i(b^i, b^{-i}) \leq g^i(a^i, b^{-i})$ pour tout profil de stratégies $b \in A$. Un équilibre en stratégies dominantes est un profil d'action $a \in A$ tel que pour tout joueur i, a^i est dominante.*

Un joueur n'a pas forcément de stratégie dominante (et il n'y a donc pas forcément d'équilibre en stratégies dominantes). Si un joueur a une stratégie dominante elle est en un certain sens unique : si a^i et b^i sont toutes deux dominantes il est immédiat qu'elles donnent le même paiement pour tout profil d'actions des autres joueurs, elles sont donc *stratégiquement équivalentes.*

Interprétation pratique : si un équilibre en stratégie dominante existe il est clair que ce devrait être l'issue du jeu dès que les joueurs sont rationnels et connaissent leur propre fonction de paiement. Cependant, un tel équilibre existe rarement : il faut que chaque joueur ait une stratégie qui soit la meilleure quelque soit le choix des autres.

Exercice 2.1.12 *Trouver les équilibres en stratégies dominantes dans les exemples.*

2.1.4 Équilibres de Nash

La notion suivante, qui généralise celle de point-selle vue dans le chapitre précédent, joue un rôle central en théorie des jeux :

Définition 2.1.13 *Un équilibre de Nash [3] (en stratégies pures) est un profil d'actions $a \in A$ tel que pour tout joueur i, l'action a^i soit une meilleure réponse au profil a^{-i} :*

$$\forall i,\ \forall b^i \in A^i,\ g^i(a^i, a^{-i}) \geq g^i(b^i, a^{-i}).$$

2. au sens de stratégiquement différentes, voir plus bas
3. ou simplement équilibre

Interprétation pratique : les équilibres de Nash sont les seuls profils sur lesquels les joueurs peuvent se mettre d'accord. Ce sont les seuls profils stables : a est un équilibre de Nash si chaque joueur est content de son action a posteriori. Une autre interprétation est celle d'un médiateur extérieur qui recommande de manière publique un profil a. Si a est un équilibre de Nash et si chaque joueur pense que les autres vont suivre la recommandation, il n'a pas intérêt à dévier lui non plus : il n'y a pas de déviation unilatérale profitable.

Il est très facile de voir que

Proposition 2.1.14 *Tout équilibre en stratégie dominantes est un équilibre de Nash.*

Démonstration. Soit a un équilibre en stratégies dominantes et considérons le joueur i. Par définition $g^i(b^i, b^{-i}) \leq g^i(a^i, b^{-i})$ pour tout $b^i \in A^i$ et $b^{-i} \in A^{-i}$. En particulier pour $b^{-i} = a^{-i}$, on trouve que pour tout $b^i \in A^i$, $g^i(b^i, a^{-i}) \leq g^i(a^i, a^{-i})$. Aucun joueur n'a donc de déviation profitable. ■

Cette proposition est une généralisation de la proposition 1.1.17 qui établit, dans le cadre des jeux à somme nulle, qu'un couple de stratégies optimales est un point selle. Dans les deux cas, on montre que de "bonnes" propriétés unilatérales aboutissent à une "bonne" propriété jointe. Par contre, il n'y a pas d'équivalent à la proposition 1.1.16. Le fait qu'un profil d'actions soit un équilibre de Nash ne donne (presque [4]) aucune information sur les stratégies jouées à l'équilibre : une "bonne" propriété jointe n'entraîne pas de "bonnes" propriétés unilatérales (s'en convaincre avec l'exemple 2.1.2). Il faut donc retenir que dans le cas général, les objets intéressants à étudier sont les profils d'actions plutôt que les stratégies.

Une autre différence avec les jeux à somme nulle est qu'il peut y avoir plusieurs équilibres, avec des paiements différents, alors que la valeur d'un jeu à somme nulle est unique. D'autre part, puisque même dans le cas particulier des jeux à somme nulle il n'y a pas de valeur, il n'est pas surprenant que certains jeux n'aient pas d'équilibre en stratégies pures.

Une dernière différence : les propriétés de "Monotonie" et "Abondance de stratégies ne nuit pas" de la sous-section 1.1.4 ne sont plus vraies : considérer les exemples 2.1.7 et 2.1.8 pour s'en convaincre.

Exercice 2.1.15 *Trouver les équilibres de Nash en stratégies pures dans chaque exemple. Dans un de ces exemples, trouver un équilibre dans lequel chaque joueur joue une stratégie faiblement dominée.*

On donne, sans la démonstration (difficile), un théorème d'existence que l'on peut voir comme un analogue du Théorème de Sion :

Théorème 2.1.16 (Glicksberg-Nash) *Soit $\Gamma = \left(N, (A^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N}\right)$ un jeu tel que pour chaque joueur i,*
- *A^i est un sous ensemble convexe et compact d'un espace euclidien.*
- *La fonction de paiement g^i est continue.*
- *Pour tout profil $a^{-i} \in A^{-i}$, la fonction $a^i \to g^i(a^i, a^{-i})$ est concave [5].*

4. dans un équilibre de Nash aucune stratégie n'est strictement dominée, voir proposition 2.1.17
5. la propriété plus faible de *quasiconcavité* suffit

Alors Γ *possède un équilibre de Nash en stratégies pures.*

Il faut bien voir que ce théorème ne s'applique pas au cas fini, puisque les ensembles d'actions ne sont alors pas convexes.

2.1.5 Élimination des stratégies dominées

La proposition suivante est un analogue de la proposition 1.1.22 que l'on avait démontrée dans le cadre des jeux à somme nulle.

Proposition 2.1.17 *Soit* Γ *un jeu et* b^i *une stratégie faiblement dominée du joueur* i*. Soit* Γ' *le jeu obtenur à partir de* Γ *en éliminant la stratégie* b^i*. Alors tout équilibre de* Γ' *est un équilibre de* Γ*. Si de plus* b^i *est strictement dominée, alors* Γ *et* Γ' *ont les mêmes équilibres.*

Démonstration. On suppose que b^i est faiblement dominée par c^i. Soit a un équilibre de Γ' et supposons que a n'est pas un équilibre dans Γ. Un joueur a donc une déviation profitable. Si ce n'est pas le joueur i, alors il a également une déviation profitable dans Γ' d'où la contradiction. Donc le joueur i a une déviation profitable, qui est nécessairement b^i puisque les autres actions peuvent être jouées dans Γ'. On a donc

$$g^i(a^i, a^{-i}) < g^i(b^i, a^{-i}) \leq g^i(c^i, a^{-i})$$

et c^i est donc une déviation profitable dans le jeu Γ', d'où la contradiction.

Supposons maintenant que b^i est strictement dominée par c^i. Soit a un un équilibre de Γ et montrons que a est un équilibre de Γ'. On a nécessairement $a^i \neq b^i$ car sinon c^i serait une déviation profitable dans Γ. Donc le profil a est jouable dans le jeu Γ', et il ne peut pas y avoir de déviation profitables puisqu'il n'y en a pas dans le jeu Γ et qu'il y a moins de déviations possibles dans Γ' que dans Γ. ■

Ceci permet d'appliquer ce qu'on appelle l'élimination itérée des stratégies strictement dominées. Quand on cherche l'ensemble des équilibres d'un jeu, on peut éliminer toutes les stratégies strictement dominées d'un joueur ; puis toutes les stratégies strictement dominées dans ce nouveau jeu, et ainsi de suite.

Exercice 2.1.18 *Résoudre l'exemple 2.1.5 par l'élimination itérée des stratégies strictement dominées.*

Il faut bien comprendre que d'un point de vue pratique, pour pouvoir dire que l'issue certaine d'un jeu est un équilibre obtenu par l'élimination itérée de stratégies dominées, il faut faire plus d'hypothèses sur les agents que dans le cas d'un équilibre en stratégies dominantes. Ainsi, dans l'exemple 2.1.5, il ne suffit pas que les joueurs soient rationnels et connaissent leur propre paiement pour être certain que l'issue du jeu sera l'équilibre. Il faut également que Bernard connaisse les paiements d'Amandine, et sache qu'elle est rationnelle, pour pouvoir anticiper qu'elle va aller au Foot. Dans des exemples plus complexes il faudrait supposer que "le joueur 1 sait que le joueur 2 sait que le joueur 1 sait que le joueur 3 est rationnel" par exemple...

2.2 Jeux en stratégies mixtes

Comme dans le cas des jeux à somme nulle, nous allons désormais permettre aux joueurs de choisir leur action de manière aléatoire. Dans toute cette section les jeux considérés sont finis.

2.2.1 Modèle

Soit $\Gamma = \left(N, (A^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N}\right)$ un jeu. Pour tout i on suppose A^i fini et on note $X^i = \Delta(A^i)$ l'ensemble des probabilités sur A^i. On écrit un élément de X^i comme $x^i = \sum_{a^i\in A^i} x^i(a^i)a^i$ et on étend multilinéairement chaque g^i (hypothèse d'utilité linéaire) :

$$g^i\left(x^1, \cdots, x^N\right) = \sum_{a\in A} x^1(a^1)\cdots x^N(a^N) g^i\left(a^1, \cdots, a^N\right). \tag{2.2.1}$$

On note$X = \Pi_{i\in N} X^i = \Pi_{i\in N}\Delta(A^i)$ l'ensemble des profils de stratégies mixtes, et $X^i = \Pi_{j\in N, j\neq i} X^j$ l'ensemble des profils de stratégies mixtes des joueurs autres que i.

Exercice 2.2.1 *Se convaincre du fait que X n'est pas égal à l'ensemble $\Delta(A)$ des probabilités sur les profils de stratégies pures, qui est bien plus grand.*

Définition 2.2.2 *L'extension mixte de Γ est le jeu $\Gamma_\Delta = \left(N, (X^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N}\right)$. Un équilibre de Nash en stratégies mixtes de Γ est un équilibre de Nash en stratégies pures de Γ_Δ.*

Interprétation : chaque joueur, s'il connait les probabilités choisies par ses adversaires, est content de la probabilité qu'il a choisie. Bien entendu cela ne veut pas dire que chaque joueur sera content pour toutes les réalisations possibles, seulement qu'aucun joueur n'a intérêt à dévier avant de connaître les réalisations des différentes stratégies mixtes.

2.2.2 Propriétés

On donne ici quelques propriétés des équilibres en stratégies mixtes. Un lecteur attentif notera de nombreuses analogies avec certaines propriétés des jeux à somme nulle en stratégies mixtes énoncées dans les sections 1.2.2, 1.2.4 et 1.2.5.

On utilisera souvent le lemme suivant, conséquence immédiate du fait que g^i est multilinéaire, et donc linéaire par rapport à la i-ème variable :

Lemme 2.2.3 *Pour tout joueur i et tout profil d'actions mixtes $x\ inX$,*

$$g^i(x) = \sum_{a^i\in A^i} x^i(a^i) g^i(a^i, x^{-i}).$$

Une première conséquence est la propriété naturelle

Proposition 2.2.4 *Pour un profil en stratégies mixtes $x \in X$, si le joueur i a une déviation profitable en stratégies mixtes, alors il a une déviation profitable en stratégies pures.*

Démonstration. Soit x un profil et $i \in N$. Supposons que le joueur i n'a pas de déviations en stratégies pures, c'est à dire que $g^i(a^i, x^{-i}) \leq g^i(x^i, x^{-i})$ pour tout $a^i \in A^i$. Soit $y^i \in X^i$, alors

$$\begin{aligned} g^i(y^i, x^{-i}) &= \sum_{a^i \in A^i} x^i(a^i) g^i(a^i, x^{-i}) \text{ d'après le lemme 2.2.3} \\ &\leq \sum_{a^i \in A^i} x^i(a^i) g^i(x^i, x^{-i}) \text{ pas de déviations profitables en stratégies pures} \\ &= g^i(b^i, b^{-i}). \end{aligned}$$

On a bien montré que le joueur i n'a pas de déviation profitable en stratégie mixte. ■

Corollaire 2.2.5 *Tout équilibre de Nash en stratégies pures est un équilibre de Nash en stratégies mixtes.*

La proposition suivante donne une caractérisation très utile des équilibres en stratégies mixtes :

Proposition 2.2.6 *x est un équilibre de Nash en stratégies mixtes si et seulement si*

$$\forall i \in N,\ \forall a^i \in A^i \text{ tel que } x^i(a^i) > 0,\ g^i(a^i, x^{-i}) = \max_{b^i \in A^i} g^i(b^i, x^{-i}).$$

Démonstration. D'après la proposition 2.2.4 x est un équilibre de Nash en stratégies mixtes si et seulement aucun joueur n'a de déviation en stratégie pure, c'est à dire si pour tout joueur i, $g^i(x) \geq \max_{b^i \in A^i} g^i(b^i, x^{-i})$. Or d'après le lemme 2.2.3,

$$\begin{aligned} g^i(x) &= \sum_{a^i \in A^i} x^i(a^i) g^i(a^i, x^{-i}) \\ &\leq \sum_{a^i \in A^i} x^i(a^i) \max_{b^i \in A^i} g^i(b^i, x^{-i}) \\ &= \max_{b^i \in A^i} g^i(b^i, x^{-i}) \end{aligned}$$

et il y a égalité si et seulement si $g^i(a^i, x^{-i}) = \max_{b^i \in A^i} g^i(b^i, x^{-i})$ pour toute action a^i telle que $x^i(a^i) > 0$. ■

Une conséquence immédiate est qu'à l'équilibre chaque joueur est indifférent entre les actions qu'il joue avec probabilité strictement positive.

Corollaire 2.2.7 *Soit x un équilibre de Nash en stratégies mixtes, et supposons que le joueur i jouent les deux actions a^i et b^i avec probabilité strictement positives. Alors $g^i(a^i, x^{-i}) = g^i(b^i, x^{-i})$.*

Cette propriété est très pratique pour trouver les équilibres en stratégies mixtes dans les jeux avec peu de joueurs et peu de stratégies. Il suffit de raisonner suivant le support de x^i (l'ensemble des actions pures jouées par le joeuur i avec stratégies strictement positives).

Exercice 2.2.8 *Trouver tous les équilibres en stratégies mixtes dans les exemples 2.1.2 à 2.1.8.*

Exercice 2.2.9 *Nettement plus difficile : trouver tous les équilibres en stratégies mixtes dans l'exemple 2.1.9.*

Une dernière propriété est l'élimination des stratégies pures dominées par des stratégies mixtes. On ne donne pas la démonstration, similaire à celle de la proposition 1.2.15.

Proposition 2.2.10 *Soit Γ un jeu, soit a^i une stratégie pure faiblement dominée par une stratégie mixte, et soit Γ' le jeu dans lequel a^i a été éliminée. Alors tout équilibre en stratégies mixtes de Γ' est un équilibre en stratégies mixtes de Γ. Si a^i est strictement dominée, alors Γ et Γ' ont les mêmes équilibres en stratégies mixtes.*

2.2.3 Théorème de Nash

Le but de cette section est de démontrer le

Théorème 2.2.11 (Théorème de Nash, 1950) *Tout jeu fini admet un équilibre en stratégies mixtes.*

Commençons par quelques définitions. Si Y et Z sont deux ensembles, une correspondance F de Y dans Z, notée $F : Y \rightrightarrows Z$, est une fonction de Y dans $\mathscr{P}(Z)$, l'ensemble des parties de Z. pour tout $y \in Y$, $F(y) \subset Z$. Le graphe d'une correspondance F est $Gr(F) = \{(y,z) \in Y \times Z,\ z \in F(y)\}$.

Exemple 2.2.12 *Pour tout jeu Γ et pour tout joueur $i \in N$, on définit la correspondance de meilleure réponse (en stratégies mixtes) du joueur i, $BR^i : X^{-i} \rightrightarrows X^i$ par :*

$$BR^i(x^{-i} = \{y^i \in X^i,\ g^i(y^i, x^{-i}) = \max_{z^i \in X^i} g^i(z^i, x^{-i})\}.$$

On admettra le théorème de point fixe suivant :

Théorème 2.2.13 *Soit Y un convexe compact non vide d'un espace euclidien, et F : $Y \rightrightarrows Y$ une correspondance telle que*

- *son graphe $Gr(F)$ est compact.*
- *Pour tout $y \in Y$, $F(y)$ est un convexe compact non vide.*

Alors F admet un point fixe : il existe $y^* \in Y$, $y^* \in F(y^*)$.

On peut maintenant démontrer le théorème de Nash.

Démonstration du théorème de Nash. Soit X l'ensemble des profils de stratégies mixtes. On définit la correspondance de meilleure réponse $BR : X \rightrightarrows X$ par

$$BR(x) = \{y \in X,\ \forall i \in N,\ y^i \in BR^i(x^{-i}\} = \Pi_{i \in N} BR^i(x^{-i})$$

où BR^i est la correspondance de meilleure réponse du joueur i définie dans l'exemple 2.2.12. $BR(x)$ est donc l'ensemble des profils de stratégies y tel que pour tout joueur i,

y^i est une meilleure réponse à x^{-i}. Un point fixe de BR est donc un profil x tel que pour tout joueur i, x^i est une meilleure réponse à x^{-i}, c'est à dire un équilibre de Nash (en stratégies mixtes). Le théorème de Nash sera donc démontré pourvu qu'on vérifie que la correspondance BR satisfait les hypothèses du théorème de Kakutani.

Notons tout d'abord que pour tout i, $X^i = \Delta(A^i)$ est un convexe compact ; X est donc un produit fini d'ensembles convexes compact et par conséquent convexe et compact également. On remarque ensuite que pour tout i et tout x^{-i}, la fonction $y^i \to g^i(y^i, x^{-i})$ est une forme linéaire (lemme 2.2.3) continue et définie sur un ensemble compact. Par conséquent, l'ensemble $BR^i(x^{-i})$ sur lequel elle prend son maximum est compact convexe et non vide. L'ensemble produit $BR(x)$ est donc également compact convexe et non vide.

Il reste à démontrer que le graphe de BR est fermé. Soit donc une suite $(x_n, y_n) \in Gr(BR)$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$. Par définition de BR, pour tout tout entier n, tout joueur i, et toute stratégie mixte $z^i \in X^i$,

$$g^i(y_n^i, x_n^{-i}) \geq g^i(z^i, x_n^{-i}).$$

Par continuité, en faisant tendre n vers $+\infty$, on trouve que pour tout joueur i et pour toute stratégie mixte $z^i \in X^i$,

$$g^i(y^i, x^{-i}) \geq g^i(z^i, x^{-i})$$

et $(x, y) \in Gr(BR)$.

Le théorème de Kakutani permet donc de conclure. ■

Deuxième partie

Jeux sous forme extensive

On a vu que les jeux sous forme normale modélisaient des situations dans lesquelles les joueurs jouaient une seule fois et tous en même temps. Dans cette partie on cherche à modéliser des interactions avec une structure dynamique (c'est à dire que le temps joue un rôle) :

- Les joueurs peuvent jouer plusieurs fois
- Ils peuvent jouer en même temps ou non
- Ils peuvent avoir des informations (ou non) sur les coups précédents des autres joueurs, sur les objectifs des autres joueurs.

La plupart des jeux usuels peuvent être modélisés comme des jeux sous forme extensive : échecs, backgammon, monopoly, poker etc...

Chapitre 3

Jeux à information parfaite

Sauf mention explicite du contraire tous les ensembles de ce chapitre sont supposés finis.

3.1 Modèle

Un jeu à information parfaite est un jeu dans lequel les joueurs jouent les uns après les autres, et où tout le monde sait tout, observe tout, et se rappelle de tout. Pour simplifier on suppose également pour le moment que le hasard ne joue aucun rôle (voir la section 3.5 pour l'introduction du hasard).

Par exemple : les échecs, les dames. Par contre le poker n'est pas un jeu à information parfaite (information privée sur les cartes en main), pas plus que le jeu du penalty de la première partie (les joueurs jouent simultanément). Le monopoly ou le backgammon sont des jeux à information parfaite mais avec hasard, donc n'entrent pas non plus dans le modèle ci-dessous.

3.1.1 Arbre

Un arbre $\mathscr{A}$ est un triplet (Z, r, θ) où :

- Z est un ensemble fini de nœuds,
- r est un nœud particulier appelé racine,
- $\theta : Z \setminus \{r\} \to Z$ est l'application prédécesseur,
- tous les nœuds sont reliés à la racine : $\forall z \in Z$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $\theta^n(z) = r$ (où dit d'une manière équivalente : il n'y a pas de cycle).

On note $S(z) = \{z' \in P, \theta(z') = z\}$ l'ensemble des successeurs de p. L'ensemble des nœuds sans successeurs est notés T : c'est l'ensemble des nœuds terminaux. L'ensemble $Z \setminus T$ des nœuds non terminaux est noté Q.

3.1.2 Arbre de décision

Un jeu sous forme extensive à information parfaite Λ est un arbre de décision, c'est à dire :

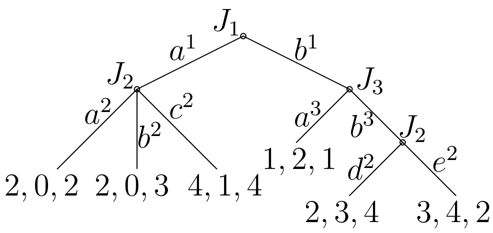
- un ensemble fini N de joueurs,

– un arbre $\mathcal{A}$,
– une partition des nœuds non terminaux $Q = \bigsqcup_{i=1}^{N} Q^i$,
– pour chaque joueur i une fonction de paiement $g^i : T \to \mathbb{R}$.

3.1.3 Déroulement du jeu

Le jeu commence à la racine : le joueur i_1 tel que $r \in Q^{i_1}$ joue en choisissant un successeur $z_1 \in S(r)$. C'est ensuite au tour du joueur i_2 tel que $z_1 \in Q^{i_2}$ de jouer en choisissant un successeur $z_2 \in S(z_1)$ et ainsi de suite. Lorsqu'on atteint un nœud terminal $z_k \in T$ le jeu s'arrête. Le paiement du joueur i est alors donné par $z^i(p_k)$.

Exemple 3.1.1 *L'arbre de décision ci-dessous représente un jeu à trois joueurs sous forme extensive.*



3.2 Réduction sous forme normale

On va voir dans cette section que, bien que les jeux à information parfaite fassent intervenir le temps, on peut les exprimer comme des jeux sous forme normale. L'idée est que chaque joueur, avant que le jeu ait commencé, peut décider ce qu'il va faire dans chacun des nœuds qu'il contrôle.

Formellement, une stratégie du joueur i est une fonction σ^i de Q_i dans Z telle que pour tout $z \in Q^i$, $\sigma^i(z) \in S(z)$; on note Σ^i l'ensemble de telles stratégies du joueur i. On associe à tout profil de stratégies $\sigma = (\sigma^1, \cdots, \sigma^N)$ un nœud terminal $\tilde{z}$ (le nœud auquel on arrive si les joueurs jouent suivant σ) et pour tout i on définit $g^i(\sigma)$ comme étant égal à $g^i(\tilde{z})$. Ceci permet d'associer à tout jeu sous forme extensive à information parfaite le jeu sous forme normale $\Gamma = (N, (\Sigma^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N})$. On appelle Γ la forme normale associée, ou la réduction sous forme normale.

La forme normale associée est toujours un jeu fini, mais pour certains jeux usuels, cette forme normale associée peut être gigantesque ! Par exemple dans le cas des échecs, un joueur a en moyenne nettement plus de dix actions possibles à chaque coup. Même en obligeant le jeu à se terminer après 50 coups par joueur, cela fait 10^{50} actions pour chaque joueur dans la forme normale associée, soit le nombre d'atomes constituant la Terre...

Exercice 3.2.1 *Mettre l'exemple 3.1.1 sous forme normale. Combien chaque joueurs a t-il de stratégies pures ?*

3.3 Equilibres de Nash

Définition 3.3.1 *Un équilibre de Nash d'un jeu sous forme extensive est un équilibre de Nash de sa forme normale associée.*

Exercice 3.3.2 *Trouver tous les équilibres en stratégies pures dans l'exemple 3.1.1.*

Proposition 3.3.3 *Tout jeu sous forme extensive à information parfaite et sans hasard admet un équilibre en stratégies pures.*

On va montrer un résultat plus fort dans la section suivante, on se passe donc de démonstration pour le moment. Un corollaire trivial mais intéressant est :

Corollaire 3.3.4 *Soit un jeu sous forme extensive à deux joueurs, à somme nulle, à information parfaite et sans hasard. Alors le jeu a une valeur, et cette valeur est le paiement d'un des nœuds terminaux. En particulier :*

- *si les seules issues du jeu sont "J_1 gagne" et "J_2 gagne", alors un des joueurs a une stratégie gagnante à coup sûr.*
- *si les seules issues du jeu sont "J_1 gagne" , "J_2 gagne" et "match nul", alors soit un des joueurs a une stratégie gagnante à coup sûr, soit chaque joueur peut s'assurer de faire au moins match nul.*

3.4 Équilibres sous-jeux parfaits

Définition 3.4.1 *Pour tout $z \in Q$, le sous-jeu Λ_z de Λ est le jeu sous forme extensive dans lequel on ne garde que l'arbre issu de p :*

- *l'ensemble de joueurs N est le même que dans Λ,*
- *l'ensemble des nœuds Z_z est constitué de z, de ses successeurs, des successeurs de ses successeurs...*
- *la racine est z,*
- $T_z = T \cap Z_z$; $Q_p = Q \cap Z_z$; $Q^i_p = Q^i \cap Z_z$; $g^i_z = g^i_{|T_z}$.

On remarque qu'en particulier $\Lambda_r = \Lambda$: le jeu est un sous-jeu de lui même.

Tout profil de stratégies pures dans Λ induit naturellement un profil de stratégies pures dans chaque sous-jeu (en considérant le restriction au sous-jeu de chaque stratégie).

Définition 3.4.2 *Un profil de stratégies pures de Λ est sous-jeu parfait (ou parfait en sous-jeux) si c'est un équilibre de Nash dans chaque sous-jeu de Λ.*

A cause de la remarque précédente, tout équilibre sous-jeu parfait est nécessairement un équilibre de Nash, mais la réciproque est fausse en général.

Proposition 3.4.3 (Kuhn Zermelo 1913) *Tout jeu sous forme extensive à information parfaite et sans hasard admet un équilibre sous-jeu parfait en stratégies pures.*

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur le nombre k de nœuds. Si $k = 1$ personne ne joue et le résultat est trivial. Supposons donc le résultat vrai pour tout jeu avec strictement moins de k nœuds et soit Λ un jeu avec k nœuds. On note i_0 le joueur qui joue à la racine ($r \in Q^i$). On considère les sous-jeux issus des successeurs de la racine : pour tout $z_j \in S(r)$, soit σ_{z_j} un équilibre sous-jeu parfait de Λ_{z_j} (il existe d'après l'hypothèse de récurrence) et notons $g^{i_0}(z_j)$ le paiement du joueur i_0 dans cet équilibre.

D'après les hypothèses faites sur l'arbre (un seul prédécesseur, et tout les nœuds sonts reliés à la racine), chaque nœud autre que r appartient à un et un seul de ces sous-jeux. On peut donc définir un profil de stratégie σ de la manière suivante :

– Pour tout joueur i et tout nœud autre que la racine $z \in Q^i$, soit z_j tel que z est un nœud de Λ_{z_j}. Au nœud z σ^i choisit le même successeur que $\sigma^i_{z_j}$.
– A la racine, σ^{i_0} choisit z_j qui maximise $g^{i_0}(z_j)$.

Montrons que ce profil σ est un équilibre sous-jeu parfait de Λ. Soit donc $z \in Q$ un nœud non terminal, et montrons que σ est un équilibre de Nash de Λ_z. Si z n'est pas la racine, soit z_j tel que $z \in \Lambda_{z_j}$. La restriction de σ à Λ_{z_j} est σ_{z_j} par construction, et on a supposé que σ_{z_j} est un équilibre sous-jeu parfait de Λ_{z_j}, σ est donc bien un équilibre de Nash de Λ_z.

Il reste donc juste à démontrer que σ est un équilibre de Nash du jeu Λ. Puisqu'on vient de démontrer que σ induit un équilibre de Nash dans tout sous-jeu strict, aucun joueur ne peut avoir de déviation profitable dans un nœud autre que la racine. Et d'autre part, la construction de σ à la racine implique que le joueur i_0 n'a pas de déviation profitable à la racine. ■

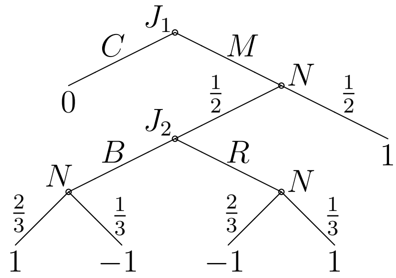
La construction utilisée dans la démonstration est appelée "induction en amont" ou "induction à rebours", elle permet de calculer explicitement les équilibres sous-jeux parfaits en partant des nœuds terminaux et en remontant l'arbre.

Exercice 3.4.4 *En raisonnant par induction en amont, trouver tous les équilibres sous-jeux parfaits dans l'exemple 3.1.1.*

3.5 Avec hasard

Pour de nombreuses modélisations il peut être utile d'introduire des aléas exogènes. Ceci se fait en rajoutant dans l'arbre le joueur 0, appelé "Hasard" ou "Nature". Ce joueur n'a pas de fonction de paiement, et aux nœuds qu'il contrôle joue selon une loi de probabilité connue de tous. Tous les concepts de ce chapitre s'étendent facilement (pour la réduction sous forme normale la fonction de paiement d'un joueur est bien entendu son espérance de gain), et tous les résultats sont encore vrais, à part que dans le corollaire 3.3.4 la valeur d'un jeu à somme nulle n'est pas nécessairement le paiement d'un nœud terminal.

Exemple 3.5.1 *On considère le jeu à deux joueurs et à somme nulle suivant. Le joueur 1 choisit de se Coucher (partie nulle) ou de Miser. S'il mise, on tire à pile ou face : si c'est pile le jeu s'arrête et le Joueur 1 gagne. Si c'est face, c'est au joueur 2 de jouer en choisissant Blanc ou Rouge. On mélange ensuite une boule blanche et deux rouges et on* *en tire une au hasard. Si le Joueur 2 avait deviné juste il gagne, sinon c'est le Joueur 1 qui gagne. La forme extensive de ce jeu est représentée ci-dessous.*



Exercice 3.5.2 *Mettre le jeu ci-dessus sous forme normale. Trouver la valeur et des stratégies optimales de chaque joueur (on pourra faire deux raisonnements : un sur la matrice de paiement, et un autre par induction à rebours sur l'arbre de décision).*