

Chapitre 1

Introduction à la Théorie des Jeux

1.1. Introduction

La théorie des jeux [AUM 02] est un formalisme qui vise à étudier les interactions entre agents sachant que de telles interactions peuvent s'étendre de la coopération au conflit. Originellement conçue comme un outil mathématique pour les sciences économiques, il a montré au travers des années, qu'il pouvait être fort utile en logique et théorie des ensembles [GRÔ2, MAR 75], en biologie et théorie de l'évolution [SMI 02], en informatique [PAP 95, PAR 02, GIE 06], en analyse de conflits [MYE 97], etc. Comme on le voit donc l'interaction semble être la pierre angulaire des études sous-tendus par la théorie des jeux particulièrement dans le domaine économique. On peut toutefois se demander qu'en est-il de l'interaction dans les systèmes informatiques ?. En fait, l'interaction est une tendance majeure des systèmes informatiques actuels et un important champ de recherche. Elle se décline sous plusieurs aspects :

- interaction entre utilisateurs et systèmes informatiques ;
- interaction entre entités informatiques autonomes (agents) collaborant pour résoudre un problème, interconnectées sur un réseau local ou sur "la toile",
- sans oublier l'intégration de ces deux aspects dans les divers "agents conversationnels", "agents de recherche", "assistants personnels", etc.

Dans l'un ou l'autres de ces aspects, l'interaction est importante dans la mesure où c'est à travers elle qu'on peut combiner les efforts, négocier, entrer en compétition, s'entraider, fournir un service, etc. Les problèmes des différents intervenants qu'ils soient des humains ou logiciels pourraient exhiber des dépendances mutuelles et par conséquent, ils seraient appelé à interagir en vue de les résoudre. Nous utilisons le mot **interaction** pour signifier un type d'action collective où une entité effectue une action ou prend une décision, laquelle décision est influencée par une autre entité.

Naturellement, l'interaction est par nature distribuée et elle a lieu généralement entre une entité informatique autonome (un agent) et son environnement. Celui-ci pouvant être peuplé, soit d'autres agents, soit d'opérateurs humains, soit d'objets inanimés, etc. Un environnement a en général les propriétés suivantes (d'après [RUS 03]) :

– *Accessible ou inaccessible.* Un environnement est dit accessible pour un agent donné si les capteurs de cet agent détectent *tous* les aspects pertinents au choix de l'action que cet agent doit effectuer. Dans le cas contraire, l'environnement est dit inaccessible. Bien entendu, l'accessibilité de l'environnement facilite le maintien de l'état interne de l'agent en cours du temps. à titre d'exemple, un agent joueur d'échecs, a un environnement accessible. En revanche, un agent joueur de poker a un environnement inaccessible.

– *Déterministe ou stochastique.* Si le prochain état de l'environnement est complètement déterminé par l'état actuel et les actions que comptent entreprendre l'agent, alors on pourra dire que l'environnement est déterministe. Il convient de remarquer que l'environnement est vu comme déterministe ou non *selon le point de vue de l'agent* et non du point de vue de l'observateur. Ici aussi l'agent joueur d'échec a un environnement déterministe alors que l'agent joueur de poker a, quant à lui, un environnement non-déterministe.

– *Statique ou dynamique.* Si l'environnement change quand l'agent est en train de délibérer, alors cet environnement est dit dynamique pour cet agent, sinon il est dit statique. Bien entendu, un environnement statique est facile à gérer dans la mesure où l'agent ne s'en préoccupe pas au moment de la prise de la décision. à titre d'exemple, un agent conducteur d'engin a un environnement dynamique, tandis qu'un agent joueur de poker a un environnement statique.

– *Discret ou continue.* S'il y a un nombre distinct d'actions de la part de l'agent et de réactions de la part de l'environnement, celui-ci est alors dit discret, sinon il est dit continu. à titre d'exemple, l'agent conducteur d'engin a un environnement continu, tandis que l'agent joueur d'échec ou de poker a un environnement discret.

Bien entendu, l'éventail des formalismes pour l'interaction est assez large puisqu'il va de la théorie des graphes à l'économie rationnelle en passant par toutes sortes de logiques (déontique, temporelle, épistémique, dynamique, etc.) Du point de vue des formalismes utilisés pour décrire analyser et raisonner sur l'action, on peut mettre en évidence la logique et la théorie de la décision et plus généralement les principes de la rationalité économique [DOY 90]. L'une et l'autre peuvent être utilisées soit d'une manière *descriptive* (i.e., comme un ensemble de concepts et d'outils mathématiques avec lesquels le raisonnement et l'action peuvent être formalisés et analysés), soit d'une manière *normative* (i.e., comme un ensemble de "lois" auxquelles le raisonnement et l'action doivent se conformer). En fait, les deux sont importants dans le cadre de l'interaction.

Jusqu'à ces dernières années, l'utilisation descriptive de la logique dépassait de loin l'utilisation des outils basés sur la prise de décision. D'une manière générale, la logique a été utilisée pour formaliser les connaissances et la planification afin (1) d'inférer de nouvelles connaissances et les mettre à jour et, (2) déterminer la séquence d'actions qui permettrait d'atteindre tel ou tel but (planification des actions). De façon similaire, les outils de prise de décision et en particulier la rationalité économique peuvent être utilisés de manière descriptive pour identifier les conditions sous lesquelles, telle ou telle technique d'inférence est meilleure qu'une autre, ou d'expliquer pourquoi une technique est meilleure ou moins bonne dans des circonstances spécifiques. À notre connaissance, cet aspect a très peu intéressé les chercheurs.

En fait, la logique et l'économie rationnelle peuvent très bien se compléter dans le cadre de l'interaction puisqu'elles remplissent des rôles bien complémentaires. La logique sert à décrire les possibilités pour raisonner et agir, tandis que l'économie rationnelle sert à prescrire les choix parmi ces possibilités. La logique joue un rôle descriptif en développant des formulations de problème, l'économie rationnelle joue, quant à elle, un rôle en choisissant les problèmes à résoudre et les moyens pour le faire.

Bien entendu les environnements d'agents autonomes auxquels on doit faire face se doivent de refléter la réalité et ils sont dès lors : inaccessibles, stochastiques, dynamiques et continues. Pour rendre compte de cela, il nous faut tout d'abord étendre la notion de théorie des jeux à des *jeux dynamiques*, généralement utilisés pour rendre compte de la compétition entre processus évoluant dans le temps. Des transitions stochastiques sont ensuite utilisées pour formaliser l'incertain inerrant et pouvant donner lieu à une analyse statistique quantitative. Les *jeux stochastiques (ou Markoviens)* sont des jeux dynamiques avec des transitions stochastiques. Ils forment, de nos jours, une théorie mathématique mature et riche, utilisée dans beaucoup d'applications comme l'économie, la biologie et tout ce qui tourne autour de l'évolution et des populations, les files d'attente, les télécommunications, le model checking, etc. Ces derniers temps, les jeux Markoviens ont pris beaucoup d'importance en informatique aux travers plus particulièrement des systèmes multiagents spécialement pour la décision, la planification et l'apprentissage dans un environnement où interviennent plusieurs agents autonomes. (Liens)

1.2. Rappel sur la théorie des jeux

1.2.1. Quelques définitions de base

Plus généralement, une partie de poker, la formation d'une équipe, où une négociation entre agents pour la prise de rendez-vous sont autant de jeux différents obéissant à des règles spécifiques. Dans ces jeux, chaque participant ne peut être totalement maître de son sort ; on dit alors que tous les intervenants se trouvent en situation d'interaction

stratégique [THI 04]. La théorie des jeux vise à étudier formellement ce type de jeux où le sort de chaque agent participant dans le jeu, dépend non seulement des décisions qu'il prend mais également des décisions prises par les autres agents intervenant dans le jeu. Dès lors, le "meilleur" choix pour un agent dépend généralement de ce que font les autres.

Les agents participants à un jeu sont appelés joueurs. Ainsi un joueur est un agent qui pourrait représenter une entreprise, un robot, un consommateur, etc. et qui agit pour son propre compte selon le principe de la rationalité qui vise à maximiser soit son utilité soit une mesure de performance donnée¹ comme le précisent Russell et Norvig [RUS 03]. Ainsi, chaque agent cherche à prendre les "meilleures décisions" pour lui-même et ne fait pas référence à un quelconque "sacrifice" pour autrui. Bien entendu, ceci n'est plus valable si on s'intéresse à des équipes d'agents où les participants poursuivent un objectif commun.

1.2.1.1. *Jeux non coopératifs et coopératifs*

En théorie des jeux, il est important de garder à l'esprit que les agents participants au jeu (qu'on appelle dorénavant agent(s)-jouer(s)) se doivent de choisir leurs propres actions, en tenant compte des actions des autres participants. Ils doivent raisonner sur autrui et essayer de se faire une idée aussi précise que possible. À cet effet, la théorie admet : i) que chaque agent-joueur s'efforce de prendre les meilleures décisions pour lui-même et sait que les autres font de même ; ii) que le précédent fait, est une connaissance commune à tous les agents-joueurs.

En théorie des jeux, on distingue les jeux coopératifs des jeux non-coopératifs. Un jeu est dit *coopératif* si les agents-joueurs peuvent passer entre eux des accords qui les lient de manière contraignante. C'est le cas par exemple, si les agents-joueurs s'accordent sur un contrat, un accord devant une autorité, etc., où il est prévu une sanction légale en cas de non respect du contrat ou de l'accord. Dans ce cas, on dit que les agents-joueurs forment une *coalition* dont les membres agissent de concert. Lorsque les agents-joueurs n'ont pas la possibilité de former des coalitions, on dit que le jeu est *non-coopératif*. Dans ce type de jeu, on spécifie toutes les options stratégiques offertes aux agents-joueurs, chose qu'on ne fait pas dans les jeux coopératifs.

Un jeu non-coopératif peut être défini de deux manières différentes (qui sont toutefois équivalentes) : stratégique (ou normale) et extensive. Un *jeu en forme stratégique* est une collection de stratégies décrivant les actions de chaque agent-joueur dans toutes les situations concevables du jeu, ainsi que les *gains* obtenus par chacun lorsque les stratégies de tous les agents sont connues. Voici un exemple de jeu en forme stratégique pour deux agents-joueurs, *Entreprise1* et *Entreprise2* ayant à leur disposition les actions *produit* et *ne produit pas*. Par convention les gains sont reportés sous la

1. Une telle mesure définit le critère de succès du comportement de l'agent.

forme (x, y) pour une combinaison d'actions $action_{Entreprise1} \times action_{Entreprise2}$ et où x est le gain de l'agent-joueur ligne (ici **Entreprise1**) et y est le gain de l'agent-joueur colonne (ici **Entreprise2**).

		Entreprise2	
		<i>produit</i>	<i>ne produit pas</i>
Entreprise1	<i>produit</i>	-3, -2	10, 0
	<i>ne produit pas</i>	0, 8	0, 0

Figure 1.1. Exemple de jeu en forme stratégique.

Un tel jeu peut aussi se présenter sous la *forme bi-matricielle* où la première matrice représente les gains relatifs à **Entreprise1** comme le montre la figure 1.2 ; alors que la deuxième matrice représente les gains de **Entreprise2** et est illustrée en figure 1.3.

		Entreprise2	
		<i>produit</i>	<i>ne produit pas</i>
Entreprise1	<i>produit</i>	-3	10
	<i>ne produit pas</i>	0	0

Figure 1.2. Gains de l'entreprise 1

		Entreprise2	
		<i>produit</i>	<i>ne produit pas</i>
Entreprise1	<i>produit</i>	-2	0
	<i>ne produit pas</i>	8	0

Figure 1.3. Gains de l'entreprise 2

Un jeu en forme extensive (appelé aussi développé) est défini par un arbre qui décrit comment le jeu est joué. Dans ce cas, chaque sommet de l'arbre spécifie le (ou les) agent(s)-joueur(s) qui doit (doivent) choisir une action à ce moment du jeu ainsi

que l'information dont chaque agent-joueur dispose lors de la prise de décision. Les gains que chaque agent-joueur peut réaliser après avoir suivi un des chemins possibles au sein de l'arbre sont donnés aux sommets terminaux de l'arbre. Il se peut parfois, que les événements possibles et leurs probabilités peuvent aussi être associés à certains sommets de l'arbre. Un exemple d'une telle présentation est donnée en figure 1.11.

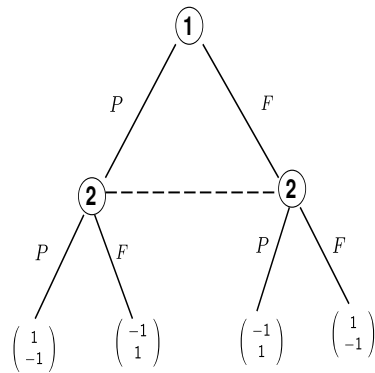


Figure 1.4. *Forme extensive du jeu de pile ou face entre deux joueurs.*

Dans ce jeu en forme extensive, l'arbre décrit toutes les règles du jeu relatif à pile ou face entre deux agents-joueurs 1 et 2. L'agent-joueur 1 gagne si le résultat est le même, quand les deux agents jouent et il perd dans le cas inverse. Comme on le voit, les gains respectifs de 1 et 2 sont représentés au niveau des sommets terminaux. Si de plus on précise que l'agent-joueur ne sait pas ce que le joueur 1 a joué préalablement, on représente cela par un trait discontinu liant P et F de l'agent-joueur 1 pour dire que 2 ne les différencie pas.

Continuons sur les concepts de base et définissons maintenant ce qu'on appelle une *stratégie pure*. Une telle stratégie reflète une action ou une suite d'actions choisie par chaque agent-joueur avec certitude. Dans certains cas, il est préférable d'avoir recours à une *stratégie mixte* définie comme une distribution de probabilité sur l'ensemble des stratégies pures. Dans le contexte plus spécifique d'un jeu en forme extensive, hormis les stratégies pures et mixtes, on introduit également la stratégie locale et la stratégie comportementale [YIL 03].

– Une *stratégie locale* d'un joueur i est similaire à une stratégie mixte, sauf qu'elle est définie au niveau d'un ensemble d'information, au lieu du jeu global. Précisément, pour un joueur i , elle définit par conséquent, pour chaque ensemble d'information h , une mesure de probabilités sur l'ensemble des actions disponibles en cet ensemble d'information.

– Une *stratégie comportementale* du joueur i est un vecteur de stratégies locales de ce joueur, contenant une stratégie locale par ensemble d'information de ce joueur.

1.2.1.2. Définition d'un jeu en forme stratégique

Les éléments constitutifs d'un jeu \mathbf{G} en forme stratégique sont les suivants [THI 04] :

- $\mathbf{N} = 1 \dots n$ est l'ensemble fini des agents-joueurs. Pour éviter toute confusion, un agent-joueur quelconque est noté \mathbf{i} . Bien entendu $\mathbf{i} \in \mathbf{N}$.

- s_i désigne la stratégie de l'agent-joueur \mathbf{i} . Une telle stratégie décrit de manière précise ce qu'un joueur fait. Par extension, l'ensemble \mathbf{S}_i décrit toutes les stratégies disponibles pour le joueur \mathbf{i} . Bien entendu, $s_i \in \mathbf{S}_i$.

- Dès lors, $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_i, \dots, s_n) \in \mathbf{S}_1 \times \dots \times \mathbf{S}_i \times \dots \times \mathbf{S}_n \equiv S$ est une issue du jeu ; autrement dit une combinaison de stratégies où s_i est la stratégie pour l'agent \mathbf{i} . Dans le reste du chapitre, $\mathbf{s}_{-\mathbf{i}} \in \mathbf{S}_{-\mathbf{i}}$ désigne toutes les stratégies choisies sauf celle du joueur \mathbf{i} .

- $u_i(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}$ est la fonction de gain du joueur $\mathbf{i} \in \mathbf{N}$. On voit bien que la fonction de gain de l'agent-joueur \mathbf{i} dépend non seulement de sa stratégie s_i , mais aussi de celles des autres joueurs reflétées dans \mathbf{s} . Par ailleurs, le joueur \mathbf{i} préfère strictement l'issue \mathbf{s} à l'issue \mathbf{s}' si $u_i(\mathbf{s}) > u_i(\mathbf{s}')$. Dans le cas, où $u_i(\mathbf{s}) = u_i(\mathbf{s}')$, \mathbf{i} est dit indifférent aux deux issues \mathbf{s} et \mathbf{s}' .

- Chaque agent-joueur connaît, outre les siens, les ensembles de stratégies et les fonctions de gains de tous les autres joueurs.

Cette dernière hypothèse caractérise le jeu comme étant en *information complète*. À l'inverse, un jeu est dit en *information incomplète* si les agents-joueurs ne connaissent certains éléments du jeu qu'en termes de probabilités.

Un jeu à deux joueurs est à somme nulle si $u_1(\mathbf{s}) + u_2(\mathbf{s}) = 0$ et ce $\forall \mathbf{s} \in \mathbf{S}$. En d'autres mots, les gains de l'un sont les pertes de l'autre, et les joueurs sont donc des opposants. Ce genre de jeu particulier peut trouver une solution via le maxmin. Pour illustrer cela, supposons que le joueur \mathbf{i} est celui qui cherche à maximiser et il a à sa disposition m stratégies soient s_{ik} avec $k = 1, 2, \dots, m$ et \mathbf{j} est celui qui cherche à minimiser et il a à sa disposition n stratégies soient $s_{jk'}$ avec $k' = 1, 2, \dots, n$. Dans ce cas, si le joueur \mathbf{i} choisit la stratégie k tandis que \mathbf{j} choisit la stratégie k' , alors \mathbf{j} doit payer à \mathbf{i} le gain $a_{kk'}$ ². L'ensemble de tous les gains possibles que \mathbf{i} peut obtenir est représenté par une matrice A $m \times n$ avec l'entrée $a_{kk'}$. Dès lors, dans cette matrice A , l'agent sensé maximiser (i.e., \mathbf{i}) sélectionne les ligne de A , tandis que l'agent qui est sensé minimiser (i.e., \mathbf{j}) sélectionne les colonnes.

Considérons alors l'exemple montré en figure 1.5 ci dessous. Bien entendu, un tel jeu peut être représenté simplement par la matrice de la figure 1.6.

2. Les paiements négatifs sont permis car on est dans un jeu à somme nulle. On pourrait aussi dire que \mathbf{i} reçoit la quantité $a_{kk'}$ alors que \mathbf{j} reçoit la quantité $-a_{kk'}$

		Min		
Max	3, -3	1, -1	8, -8	
	4, -4	10, -10	0, 0	

Figure 1.5. Jeu à somme nulle.

		Min		
Max	3	1	8	
	4	10	0	

Figure 1.6. Autre représentation matricielle d'un jeu à somme nulle.

La question maintenant est de savoir quelle option, devra choisir un agent rationnel ? Pour cela, il faudra considérer les *niveaux de sécurité* de chacun des agents [HAU 98]. Il est alors facile de voir que si **Max** choisit la première ligne, quel que soit ce que fait **Min**, il fera au moins un gain de 1. En choisissant la deuxième ligne, il risque de faire un gain nul. De façon similaire, en choisissant la première colonne, **Min**, il n'aura pas à payer plus que 4, tandis que s'il choisit la seconde ou la troisième colonne, il risque de perdre respectivement 10 ou 8. On voit donc que le niveau de sécurité de **Max** est 1 et il est assuré par le choix de la première ligne, tandis que le niveau de sécurité de l'agent **Min** est 4 et il est assuré par le choix de la première colonne. Il convient de noter que :

$$1 = \max_k \min_{k'} a_{kk'}$$

$$4 = \min_{k'} \max_k a_{kk'}$$

Ceci montre que la stratégie qui assure à l'agent **Max** son niveau de sécurité est la *stratégie maxmin*. Symétriquement, la stratégie qui assure à l'agent **Min** son niveau de sécurité est la *stratégie minmax*.

Proposition 1 Dans une matrice représentant un jeu à deux joueurs à somme nulle, on a l'inégalité suivante :

$$\max_k \min_{k'} a_{kk'} \leq \min_{k'} \max_k a_{kk'}$$

PREUVE.— voir [HAU 98].

Une importante observation est que si Max joue en premier et que Min agit ensuite ayant connaissance de l'action de Max, alors la stratégie maxmin de Max est le meilleur choix et elle mène à un gain de 1 pour Max. Si la situation est inverse est qu'il revient à Min de jouer en premier, alors son meilleur choix est la stratégie minmax et il a à payer 4. Mais que se passe-t-il si les deux joueurs jouent simultanément ? Une étude approfondie du jeu précédent illustré en figure 1.5 montrerait que dans ce cas, les stratégies maxmin et minmax ne sont pas des solutions satisfaisantes pour ce jeu. Dans certains cas toutefois, le jeu pourrait converger vers une solution stable. Considérons un autre exemple, celui de la figure 1.7, emprunté à [HAU 98].

		Min		
		10	-15	20
Max	20	-30	40	
	30	-45	60	

Figure 1.7. Jeu où Maxmin = Minmax.

Il est facile ici de voir que :

$$-15 = \max\{-15, -30, -45\}$$

$$-15 = \min\{30, -15, 60\}$$

Ainsi, la paire correspondant aux stratégies maxmin and minmax est donnée par $a_{kk'} = (15, -15)$ et elle correspond à $(k, k') = (1, 2)$, c'est à dire à la première ligne et à la deuxième colonne.

Si dans une matrice de jeu à somme nulle il y a une paire (k^*, k'^*) , telle que :

$$a_{kk'^*} \leq a_{k^*k'^*} \leq a_{k^*k'}$$

on dit alors que la paire (k^*, k'^*) est un point de selle.

Proposition 2 Si dans une matrice de jeu à somme nulle, on a :

$$\max_k \min_{k'} a_{kk'} = \min_{k'} \max_k a_{kk'} = v$$

alors le jeu admet un point de selle en stratégies pures.

PREUVE.– voir [HAU 98].

Si (k^*, k'^*) est un point de selle pour une matrice de jeu, alors les joueur Max et Min ne peuvent améliorer leur gain unilatéralement en déviant de k^* et k'^* respectivement. On dit alors que (k^*, k'^*) est un équilibre.

1.2.2. Jeux statiques en information complète

On dit qu'un jeu est *statique* lorsque les joueurs choisissent simultanément leurs actions et reçoivent ensuite leurs gains respectifs. Ainsi, le jeu se joue en un seul coup, contrairement aux jeux dynamiques sur lesquels nous reviendrons plus tard. Parmi ces jeux, les jeux finis à 2 joueurs occupent une place privilégiée car ils sont simples d'un point de vue présentation bien qu'englobant les principales caractéristiques (hormis la complexité engendrée par un grand nombre de joueurs et tout ce qui tourne autour) qu'on trouve en théorie des jeux. Comme on l'a précisé plus haut, ces jeux peuvent être représentés sous forme stratégiques et donc sous la forme de matrices dans lesquelles le premier joue verticalement en choisissant une ligne de la matrice, et le second horizontalement en jouant une colonne. De tels jeux sont aussi appelés jeux matriciels.

Nous allons maintenant illustrer cette forme de jeu, par le célèbre jeu du dilemme du prisonnier. Un tel jeu s'énonce de la façon suivante : Deux suspects (**Suspect1** et **Suspect2**) sont interrogés séparément par un juge pour un délit grave. Le juge ne dispose pas d'éléments de preuve suffisants pour les condamner et l'aveu d'au moins un est indispensable. Dès lors, il propose à chaque accusé la liberté s'il avoue. Par contre s'il n'avoue pas et que l'autre le fait, il écope d'une peine de 15 ans. Si les 2 avouent il peuvent espérer bénéficier de circonstances atténuantes et recevoir une peine de 8 ans. Enfin si aucun des 2 n'avoue, ils seront condamnés pour des délit mineurs à 1 an de prison chacun. Dans ce cas, la matrice des gains des deux joueurs a la forme suivante.

		Suspect2	
		<i>Avoue</i>	<i>N'avoue pas</i>
Suspect1	<i>Avoue</i>	-8, -8	0, -15
	<i>N'avoue pas</i>	-15, 0	-1, -1

Figure 1.8. Dilemme du prisonnier.

On est donc amené à se poser la question : comment doivent se comporter les deux suspects, en supposant qu'ils soient rationnels selon à la fois le principe économique

(basé sur la maximisation de l'utilité) et le principe des agents logiciels comme précisé plus haut. On peut remarquer qu'*Avouer* est une stratégie qui conduit à une peine moins lourde que la stratégie qu'*Ne pas avouer*, et ce quel que soit le choix effectué par l'autre joueur. Par conséquent, chacun des suspects a donc intérêt à opter pour cette stratégie en vue de réduire sa peine. Selon la matrice des gains, chacun va alors avoir une peine de 8 ans de prison, ce qui constitue une condamnation assez lourde. Il faut bien voir que cette stratégie mise sur le fait qu'elle est choisie parce qu'elle donne un gain moindre que l'autre stratégie *et ce sans avoir besoin de se faire une idée de ce que va faire l'autre*. Une telle stratégie est appelée, en théorie des jeux, une *stratégie dominante*.

Dans un jeu en forme stratégique, une stratégie $s_i \in \mathbf{S}_i$ est dite dominante pour le joueur i si, quel que soit $\hat{s}_i \in \mathbf{S}_i$ et $\hat{s}_i \neq s_i$, l'on a :

$$u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}) \geq u_i(\hat{s}_i, \mathbf{s}_{-i}), \quad \forall \mathbf{s}_{-i} \in \mathbf{S}_{-i}$$

Dans cet exemple, on voit bien que nos deux suspects ont intérêt à jouer leur stratégie dominante tous les deux et à ne pas dévier. La stratégie conjointe (*Avouer, Avouer*) est donc un équilibre (sorte de point fixe) pour les deux où chacun n'a pas intérêt à dévier. Plus généralement, si dans un jeu donné, tous les joueurs ont à leur disposition une stratégie dominante, alors ils ont intérêt à la choisir effectivement et dans ce cas, le résultat du jeu est appelé *équilibre en stratégies dominantes*.

Il est important de voir au niveau de la matrice de la figure 1.8 que si les prévenus s'entendaient entre eux en s'engageant à ne pas avouer, la condamnation qui leur serait appliquée serait beaucoup plus légère puisqu'elle serait juste de 1 an pour chacun. Le problème ici est que l'un ou l'autre des suspects est tenté de dévier unilatéralement de la solution coopérative, pour avoir sa liberté et que la stratégie conjointe (*Ne pas avouer, Ne pas avouer*) n'est pas un équilibre. On voit donc bien, à travers ce dilemme, que la coopération n'est pas facile à mettre en œuvre et que dans bien des cas, il faut mieux s'entendre plutôt que de se combattre.

Ainsi donc, le dilemme du prisonnier met le doigt sur des stratégies comportementales tant au niveau de l'individu qu'au niveau du groupe. C'est ainsi par exemple, qu'il montre qu'un groupe d'individus ne va pas nécessairement se comporter dans l'intérêt du groupe si chacun peut obtenir pour lui-même un résultat meilleur en choisissant pour son propre compte. D'où l'importance de disposer de lois, normes et règles sociales qui imposent une certaine coopération. Mais quelles lois, normes et règles convient-il de mettre en œuvre ? et qui les met en œuvre ? En pratique, il n'est pas aisé de trouver une réponse satisfaisante à cette question.

1.2.2.1. *Processus de dominance successive*

En fait, l'équilibre en stratégies dominantes existe rarement et il faut faire appel à d'autres types de solutions à un jeu. Dans ce cadre, on pourrait utiliser la solution suivante : si un joueur a une stratégie dominante, on peut alors s'attendre à ce qu'il la choisisse, et comme l'autre joueur est capable d'anticiper ce choix, celui-ci choisit de la contrer avec sa *meilleure réponse*. Considérons l'exemple de la matrice présentée en figure 1.9.

		Joueur2		
		s_{21}	s_{22}	s_{23}
Joueur1	s_{11}	4, 3	5, 1	6, 2
	s_{12}	2, 1	8, 4	3, 6
	s_{13}	3, 0	9, 6	2, 8

Figure 1.9. Un exemple de jeu 3×3 .

Dans ce jeu et comme nous l'avons précisé plus haut, chaque cellule du jeu contient un couple reflétant (Gain du Joueur1, Gain du Joueur2). Il est alors clair que le jeu ne possède pas de stratégie dominante ni pour l'un ni pour l'autre des joueurs. Cependant, on peut remarquer que pour le Joueur2, la stratégie s_{22} est strictement dominée par la stratégie s_{23} . Du moment que le joueur 2 est rationnel, il ne pourra pas retenir cette stratégie et on peut l'enlever de la matrice. Dans la matrice restante, on remarque que s_{11} est devenue, pour Joueur1, une stratégie dominante. Dans ces conditions, ce joueur ne peut que jouer cette stratégie. Comme par hypothèse, le jeu est à information complète, le Joueur2 peut donc anticiper cela, et aligner sa meilleure stratégie face à cela, soit s_{21} qui lui procure un gain de 3. La solution d'un tel jeu est alors l'équilibre (s_{11}, s_{21}) et il procure des gains de $(4, 3)$. Il a été obtenu via un processus de *dominance successive*.

La dominance successive est un concept plus faible que celui de la stratégie dominante. En effet, elle fait intervenir le concept de stratégie strictement dominée en lieu et place de stratégie dominante. Une stratégie $s_i \in \mathbf{S}_i$ est dite *strictement dominée* pour un joueur i s'il existe une autre stratégie $\hat{s}_i \in \mathbf{S}_i$ telle que :

$$u_i(\hat{s}_i, \mathbf{s}_{-i}) > u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}) \quad \forall \mathbf{s}_{-i} \in \mathbf{S}_{-i}$$

Bien entendu, dans le cas où $u_i(\hat{s}_i, \mathbf{s}_{-i}) \geq u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}) \quad \forall \mathbf{s}_{-i} \in \mathbf{S}_{-i}$, la stratégie s_i est dite *faiblement dominée*. l'inégalité étant ici stricte pour au moins une combinaison \mathbf{s}_{-i} . Comme on peut le constater, s'il existe une stratégie dominante pour un

joueur, toutes les autres stratégies sont donc dominées et peuvent donc être éliminées en vertu de la dominance successive. Celui-ci est donc de nature plus générale et permet d'aboutir à des solutions de jeux qui n'admettent pas d'équilibre en stratégies dominantes.

Il convient de noter que par sa nature, la dominance successive est aussi appelée élimination successive des stratégies strictement dominées. Elle ne dépend pas de l'ordre d'élimination, ni du fait que les joueurs éliminent de façon simultanée ou séquentielle. Elle converge vers un jeu réduit qui est bien défini. Si c'est un singleton, une seule stratégie pour chacun des joueurs, on a un candidat à un équilibre évident. Dans le cas où on utilise un processus à base de stratégies dominées (non strictement), il pourrait dépendre de l'ordre et de la manière dont les joueurs éliminent.

Évidemment, tous ces concepts tournant autour de la dominance peuvent ne rien donner et si aucune stratégie n'est dominée où si on aboutit à un jeu qu'on ne peut plus exploiter, le problème reste entier. Un concept plus faible permet, dans un grand nombre de cas une résolution intéressante des jeux : l'équilibre de Nash.

1.2.2.2. Équilibre de Nash

On dit qu'une combinaison de stratégies s^* est un équilibre de Nash si l'inégalité suivante est satisfaite pour chaque joueur i .

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \quad \forall s_i \in \mathbf{S}_i$$

Autrement dit, si le joueur i anticipe que les autres participants au jeu vont choisir les stratégies associées au vecteur s_{-i}^* , il ne peut que maximiser son gain en choisissant la stratégie s_i^* . Celle-ci est en fait la meilleure réponse de i à s_{-i}^* (notée mr_i) et elle correspond à :

$$mr_i : s_{-i} \mapsto \arg \max_{s_i \in \mathbf{S}_i} u_i(s_i, s_{-i})$$

Dès lors, l'équilibre de Nash peut aussi s'écrire :

$$\forall i, s_i^* \in mr_i(s_{-i}^*)$$

Comme on peut le voir, l'équilibre de Nash constitue une combinaison de stratégies où chaque joueur maximise ses gains compte tenu de l'action supposée des autres. Il a donc une propriété de "stabilité" qui est satisfaite pour chacun des joueurs, c'est pourquoi on parle d'"équilibre".

Dans l'exemple précédent de la figure 1.9, la solution (4, 3) qui résulte de l'application de la dominance successive est aussi un équilibre de Nash. Celui-ci est donc

une généralisation et dans bien des cas, c'est le seul concept de solution qui intervient dans un jeu, particulièrement quand il n'y a ni stratégie dominante ni dominée.

Dans l'exemple de la figure 1.10 deux entreprises *Entreprise1* et *Entreprise2* ont la possibilité de se lancer dans la production d'un nouveau bien pour lequel les débouchés sont limités, sans qu'il y ait de compromis possible entre elles si toutes deux décident de produire.

Ce jeu comporte 2 équilibre de Nash, (ne produit pas, produit) dont les gains sont (0,8) et (produit, ne produit pas) dont les gains sont (10,0) chacun correspondant à une situation où l'une des entreprises produit, l'autre s'abstenant de le faire. Cet exemple montre que des deux équilibres, il n'y a pas un qui apparaisse plus raisonnable qu'un autre.

		Entreprise2	
		<i>Produit</i>	<i>Ne produit pas</i>
Entreprise1	<i>Produit</i>	-3, -2	10, 0
	<i>Ne produit pas</i>	0, 8	0, 0

Figure 1.10. *Multiplicité de l'équilibre de Nash*

À cette difficulté de multiplicité d'équilibres, s'ajoute le fait qu'il peut ne pas y avoir du tout d'équilibre de Nash, en stratégies pures, pour un jeu particulier. Un exemple bien connu est celui du jeu de pile ou face (matching pennies) présenté en figure 1.11. Ce jeu pourrait être vu sous la forme stratégique montrée en figure ?? où on voit que c'est un jeu à somme nulle ne possédant pas d'équilibre de Nash.

		Joueur2	
		<i>Pile</i>	<i>Face</i>
Joueur1	<i>Pile</i>	1, -1	-1, 1
	<i>Face</i>	-1, 1	1, -1

Figure 1.11. *Exemple de jeu n'ayant pas d'équilibre de Nash*

Dans ce cas, on pourrait penser à un mécanisme aléatoire (constitué par la composition des loteries des différents intervenants) qui décide pour les joueurs. Pour cela,

on suppose que chaque joueur choisit une loterie définie sur l'ensemble des stratégies pures. Techniquement, chaque joueur associe une probabilité p_i à la stratégie s_i et laisse au mécanisme aléatoire le soin de décider. Dans ce contexte, chaque joueur vise maintenant à maximiser ses gains espérés en choisissant la meilleure loterie possible, autrement dit la meilleure stratégie mixte.

Dans le jeu de pile ou face, présenté en figure 1.11, le **Joueur1** a une probabilité p de choisir *Pile* et une probabilité de $1 - p$ de choisir *Face*. Pour le **Joueur2** les deux probabilités sont respectivement de q et $1 - q$. Dès lors, le gain espéré du **Joueur1** est reflétée par la fonction GE_1 linéaire en p suivante :

$$GE_1 = pq u_1(Pile, Pile) + p(1 - q) u_1(Pile, Face) + (1 - p) q u_1(Face, Pile) + (1 - p)(1 - q) u_1(Face, Face)$$

Maximiser ce gain espéré revient donc à chercher $d(GE_1)/dp = 0$ soit :

$$q u_1(Pile, Pile) + (1 - q) u_1(Pile, Face) = q u_1(Face, Pile) + (1 - q) u_1(Face, Face)$$

Si on remplace les u_i par les valeurs indiquées dans la matrice présentée en figure 1.11, on obtient alors :

$$q - (1 - q) = -q + (1 - q)$$

Soit alors $q = 1/2$.

Le même raisonnement pour le **Joueur2** (où cette fois-ci on chercherait le maximum $d(GE_2)/dp = 0$) aurait donné $p = 1/2$.

Le résultat $(1/2, 1/2)$ est appelé *équilibre en stratégies mixtes* et il correspond au fait que l'un ou l'autre des joueurs choisisse une fois sur deux pile, et une fois sur deux face.

Théorème 1 *on est assuré d'avoir au moins un équilibre de Nash si : (i) les ensembles de stratégies sont des sous-ensembles compacts et convexes de \mathbb{R}^n , et si (ii) la fonction de gain u_i est continue en s et strictement quasi concave en s_i pour chaque joueur.*

Rappelons qu'un ensemble compact est un ensemble fermé et borné. La convexité d'un ensemble assure, quant à elle, que quand on combine points d'un tel ensemble,

la combinaison appartiendra à cet ensemble. Un jeu fini est un jeu où les ensembles de stratégies des joueurs sont finis. La continuité et la concavité de la fonction de gain va assurer que sur l'ensemble convexe et compact des stratégies, le maximum de cette fonction, c'est à dire la meilleure réponse, va se modifier de manière continue et en restant dans l'ensemble des stratégies. Cela va assurer l'intersection des fonctions de meilleures réponses [YIL 03].

Une implication importante pour les jeux finis est alors la suivante :

Théorème 2 *Tout jeu fini admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes.*

PREUVE.– À cause du vecteur de probabilités qui sous-tend chacune de ses stratégies mixtes, l'ensemble de stratégies d'un joueur i est compact et convexe. La fonction de gain du même joueur est linéaire dans les probabilités, elle est donc continue et quasi-concave. Les hypothèses du théorème 1 sont satisfaites et il existe donc un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

Il convient de noter que la multiplicité des équilibres engendre un problème de *coordination* des choix. Un choix évident pour tous les joueurs a été appelé par Schelling *point focal*. Un exemple de choix évident est celui du rendez vous qu'on pourrait donner à quelqu'un dans un bureau situé au 15ème étage d'un immeuble et qui consiste à l'attendre au rez-de-chaussée dudit immeuble juste à l'entrée.

Pour faciliter la coordination, Aumann [AUM 74] a introduit l'*équilibre corrélé*. Il s'est basé pour cela sur le fait qu'un événement aléatoire peut être observé conjointement par tous les joueurs et de ce fait, il peut faciliter la coordination. Pour illustrer un tel équilibre introduisons d'abord le jeu de bataille de sexes où Paul et Paulette doivent décider comment organiser leur soirée. Ils ont pour cela le choix soit d'aller voir un film romantique F soit d'aller à l'opéra O . Pour les deux, ce qui compte avant tout c'est d'être ensemble. Néanmoins, Paulette a une préférence pour le film romantique et Paul pour l'opéra. Dans ce cas, le jeu est celui de la figure 1.12 qui est appelé *jeu de coordination*. Par exemple les choix de standards de télévision ou de lecteur de disquette correspondent à ce type de jeux. On voit bien que les stratégies (O,O) et (F,F) sont des équilibres de Nash.

		Paulette	
		F	O
Paul	F	$2, 1$	$0, 0$
	O	$0, 0$	$1, 2$

Figure 1.12. *La bataille des sexes.*

Du moment qu'on a 2 équilibres de Nash dans la bataille des sexes, on pourrait penser à des stratégies mixtes pour ce type de jeu. Dès lors un nouvel équilibre apparaît qui associe les probabilités $(2/3, 1/3)$ pour O signifiant ainsi que Paul va à l'opéra deux soirées sur trois, et Paulette une soirée sur trois. Leur gain espéré est de $2/3$.

Supposons maintenant que Paul et Paulette peuvent demander à leur fils de jouer à pile ou face entre O et F , et de leur à chacun de jouer O si pile est tiré et de jouer F si face est tiré. Dans ce cas leur gain espéré à chacun devient (i étant soit Paul soit Paulette) :

$$\frac{1}{2}u_i(O, O) + \frac{1}{2}u_i(F, F) = \frac{1}{2}2 + \frac{1}{2}1 = \frac{3}{2}$$

Un gain supérieur au gain espéré valant $2/3$, obtenu avec l'équilibre de Nash en stratégies mixtes. Ainsi à partir du moment où le "coordinateur" (ici le fils) n'est pas manipulable, les joueurs ont intérêt à suivre sa recommandation. En fait tout événement aléatoire et objectif peut jouer ce rôle de coordination, pourvu que les probabilités soient assurées de respecter (pour la bataille des sexes, mais pas pour tous les jeux) $0.5/0.5$ [YIL 03]. Ce type d'événement instaure une corrélation entre les choix des agents, d'où le concepts d'équilibre corrélé.

Dans ce contexte, on pourrait se demander si la solution donnée par l'équilibre de Nash correspond à un mécanisme de coordination efficace ? Deux concepts peuvent aider à répondre à cette question : l'efficacité au sens de Pareto (ou l'efficacité parétienne) et l'optimum de Pareto.

Pour le premier concept, on peut dire qu'une combinaison de stratégie \hat{s} domine au sens de Pareto une autre combinaison s si :

$$u_i(\hat{s}_i, \hat{s}_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}) \quad \forall i$$

et

$$\exists j \text{ tel que } u_j(\hat{s}_j, \hat{s}_{-j}) > u_j(s_j, s_{-j})$$

Une combinaison de stratégies \hat{s}^* est un *optimum de Pareto* s'il n'existe pas une autre combinaison qui la domine au sens de Pareto. ainsi par exemple dans le dilemme du prisonnier présenté en figure 1.8, la combinaison (*Avouer, Avouer*) est un équilibre de Nash mais la combinaison (*Ne pas avouer, Ne pas avouer*) la domine au sens de Pareto. Il faudra donc retenir que l'équilibre de Nash n'est pas nécessairement un optimum de Pareto.

Comme on vient de le voir, un équilibre de Nash n'est pas nécessairement un optimum de Pareto mais quand il y a multiplicité des équilibres de Nash, un équilibre peut dominer un autre au sens de Pareto. Le problème est de savoir comment "attirer" les joueurs vers cet équilibre dominant au lieu d'un autre équilibre qui forcément sera dominé.

1.3. Conclusion

1.4. Bibliographie

- [AUM 74] AUMANN R., « Subjectivity and correlation in randomized strategies », *Journal of Mathematical Economics*, vol. 1, p. 67–96, 1974.
- [AUM 02] AUMANN R. J., HART S., Eds., *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, Elsevier Science, volume 3, 2002.
- [DOY 90] DOYLE J., « Rationality and its roles in reasoning », *Computational Intelligence*, vol. 8(2), p. 376–409, 1990.
- [GIE 06] GIES O., CHAIB-DRAA B., « Apprentissage de la coordination multiagent : une méthode basée sur le Q-learning par jeu adaptatif », *Revue d'Intelligence Artificielle*, vol. 20(2-3), p. 385-412, 2006.
- [GRÔ2] GRÄDEL E., THOMAS W., WILKE T., Eds., *Automata, Logics and Infinite Games*, Springer-Verlag, vol. 2500 of LNCS, 2002.
- [HAU 98] HAURIE A., KRWCZYK J. B., « An Introduction to Dynamic Games », 1998.
- [MAR 75] MARTIN D. A., « Borel determinacy », *Annals of Mathematics*, vol. 102, p. 363–371, 1975.
- [MYE 97] MYERSON R. B., Ed., *Game theory : analysis of conflict*, Harvard University Press, 1997.
- [PAP 95] PAPADIMITRIOU C. H., « Algorithms, games, and the internet », *Proceedings STOC'91*, ACM Press, p. 749–753, 1995.
- [PAR 02] PARSONS S., GMYTRASIEWICZ P., WOOLWRIDGE M., Eds., *Game Theory and Decision Theory in Agent-Based Systems*, Springer Verlag, 2002.
- [RUS 03] RUSSEL S., NORVIG P., Eds., *Artificial Intelligence : A Modern Approach*, Prentice Hall Series, 2003.
- [SMI 02] SMITH J. M., Ed., *Evolution and the Theory of Games*, Cambridge University Press, 2002.
- [THI 04] THISSE J.-F., « Théorie des jeux : une introduction », *Notes de cours, Université catholique de Louvain, Département des sciences économiques*, 2004.
- [YIL 03] YILDIZOGLU M., Ed., *Introduction à la théorie des jeux*, Dunod, Paris, 2003.