

Jeux math'

EXPLORATIONS

CALCULER

PESER

CODER

DÉMONTREZ

OPTIMISER

PLIER

DES JEUX D'ESPRIT

LES DOMINOS

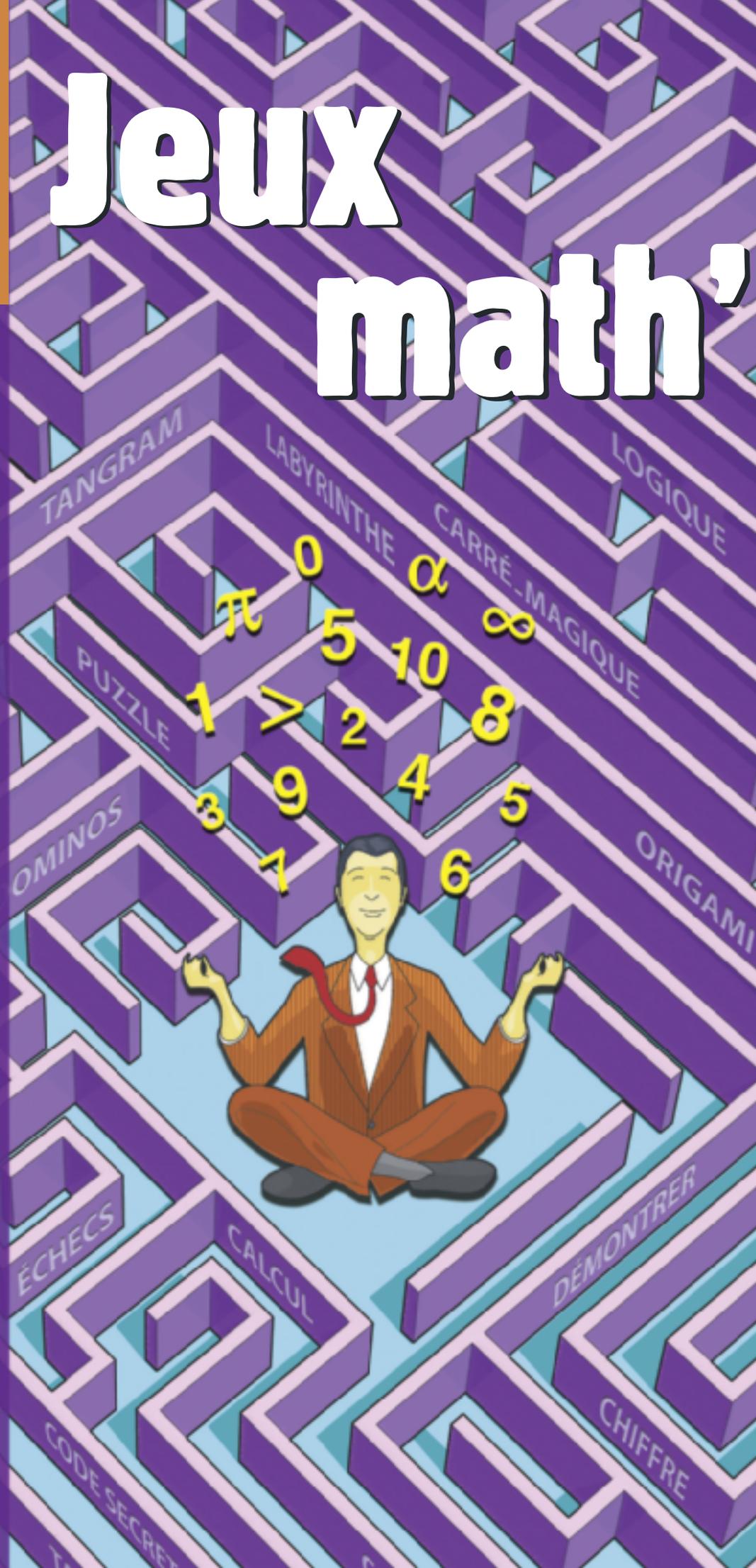
LE SOLITAIRE

LE TAQUIN

LES CASSE-TÊTE

LES ÉCHECS

LES PUZZLES



DOSSIER - AVRIL/JUIN 2008

M 01930 - 59 - F: 6,90 € - RD



FRANCE METRO 6,90 €, DOM 8,25 €, BEL 8,20 €, CH 15 FS, CAN 10,95 \$,
LUX 7,80 €, PORT. CONT. 7,90 €, AND. 6,90 €, MAY. 10,25 €, SPM 10,20 €, Tom Surface 1170 XPF, Tom Avion 2120 XPF



Un site de culture scientifique
multimédia créé par des chercheurs
à destination d'un large public

TAQUINEZ
VOTRE SOURIS!

<http://interstices.info>

RUBRIQUE
LUDIQUE

QUIZ
10 questions sur
les algorithmes

JEUX
Jouez avec
les diagrammes
de Voronoï.

ÉNIGMES
Un calcul
révolutionnaire!

design: Anne / Tiffin

Esprits ludiques

Les hommes ne sont jamais plus ingénieux que dans l'invention des jeux ; l'esprit s'y trouve à son aise.

Leibniz, Lettre à Rémond de Montmort, 1716

Les psychologues, les éducateurs, les cognitivistes et même les éthologues vous le diront : c'est par le jeu que les enfants et, plus généralement, les petits de mammifères apprennent. Le jeu leur sert à simuler la réalité et à mesurer les conséquences de leurs actes.

Mais, parmi les animaux, l'humain est le seul à inventer un monde abstrait dans ses jeux. Ce goût pour l'abstraction donne à son activité ludique une apparence plus futile que les jeux de combat auxquels se livrent les lionceaux pour tester leur force physique.

Pourtant le raisonnement logique, l'évaluation des quantités et des probabilités, la vision tridimensionnelle et l'optimisation des circuits ont conféré une remarquable capacité d'adaptation à l'espèce humaine. Ainsi, d'un point de vue évolutif, le jeu d'esprit ne serait pas futile. Aujourd'hui, l'homme est doté d'une imposante connaissance du monde, qu'il doit transmettre. Le jeu mathématique l'assiste dans sa tâche

éducative, car, comme Leibniz le remarque encore : « Nous réussissons mieux ce que nous faisons avec plaisir. » Faites réciter à un enfant le théorème de Pythagore : il s'exécute avec un certain sens du devoir. Faites-lui la démonstration du théorème sans un mot, à l'aide

de carrés accolés au triangle : son

œil s'éclaire. En outre, le jeu

mathématique ouvre des

voies d'exploration de nou-

velles mathématiques :

théorie des nombres et

code de Gray, géomé-

trie et théorie des

graphes, logique et

théorie de la com-

plexité, etc.

Foin de discours sur la

pédagogie ! Il y a un

siècle, le mathématicien

Charles-Ange Laisant s'ex-

clamait déjà : « Ceux pour

qui le mot "instruire" est syno-

nyme d'ennuyer – et quelquefois

de torturer – sont de véritables mal-

fai-teurs publics. » Nos bienfaiteurs sont

les concepteurs de jeux mathématiques, tels

que Samuel Loyd, Henry Dudeney, Édouard

Lucas, Martin Gardner... et les auteurs du

présent recueil.



Illustration de Cyclopaedia of 5 000 puzzles, tricks and conundrums (with answers), Sam Loyd, 1914.

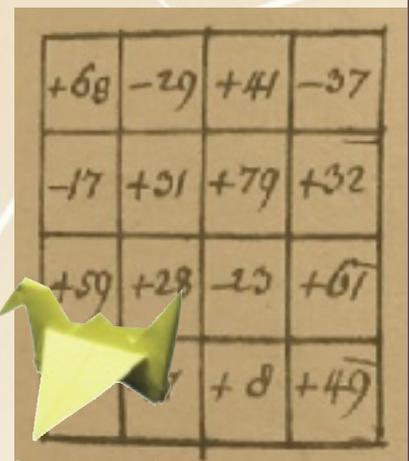
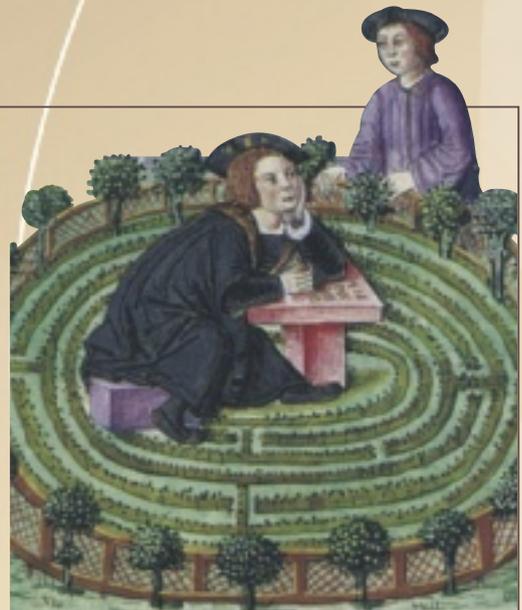
Bénédicte Leclercq

Jeux

Avant-propos de Ph. Boulanger et J. Lefort : Divertissements féconds > 4

Explorations mathématiques

- Le calculateur à spaghettis,**
Alexander Dewdney > 8
- L'aire d'une peau de vache,**
Philippe Boulanger > 13
- Les problèmes de pesées,**
Michel Criton > 14
- Cryptographie : les codes à substitution,**
Hervé Lehning > 18
- Énigmes sur les carrés magiques,**
Christian Boyer > 22
- Les nombres *Taxicabs*,**
Christian Boyer > 26
- Les meilleures stratégies,**
d'après Martin Gardner > 30
- Jeux de suites,**
Éric Angelini > 32
- Il n'y a pas moyen de moyenner !,**
Philippe Boulanger > 36
- L'exploration d'un labyrinthe,**
Pierre Tougne > 42
- Les données inutiles,**
Philippe Boulanger > 46
- De magnifiques démonstrations,**
Jean Lefort > 48
- Dissections et puzzles,**
Jean-Pierre Friedelmeyer > 54
- L'espace au secours du plan,**
Jean Lefort > 60
- Meurtre à Ghastleigh Grange,**
Ian Stewart > 64
- Les joies du pliage,**
Pierre Tougne > 68

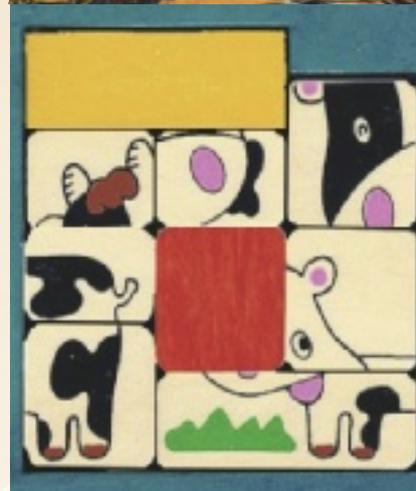


1

math'

Des jeux d'esprit

- De l'art du solitaire**, *Pierre Tougne* > 76
- Sprouts en herbe**, *Philippe Boulanger* > 81
- Du taquin à l'âne rouge**,
Jean-Paul Delahaye > 82
- Gadgets publicitaires**,
D'après Martin Gardner > 88
- La tour de Hanoï**, *Jean Lefort* > 91
- Le baguenaudier et ses variantes**,
Jean Lefort > 94
- Quickies!** *Michel Criton* > 98
- Jeux d'allumettes**,
D'après Martin Gardner > 102
- La table bancale**,
Jean Lefort > 103
- Ces défis délicieux**,
Philippe Boulanger > 104
- Échecs et dames**,
d'après Martin Gardner > 106
- Le Loony Loop**, *Jean Lefort* > 108
- Puzzles dans l'espace**, *Jean Lefort* > 110
- Les cubes Soma**, *Jean Lefort* > 112
- Dominos dominés**, *Ph. Boulanger et É. Angelini* > 116



2



Divertissements féconds

Jean LEFORT et Philippe BOULANGER

Tout le pouvoir d'attraction et d'envoûtement des mathématiques se concentre dans les jeux mathématiques. Débarrassés des enjeux et du carcan de la reine des sciences, ils peuvent être légers et plus immédiatement délectables.

Dans « jeux mathématiques » il y a « mathématiques » et il y a « jeux » : étonnante association de deux ingrédients antinomiques en apparence ! En apparence seulement... Voyons la délicate genèse du mélange.

En dehors des professionnels, qui est aujourd'hui capable de citer le nom d'un mathématicien contemporain ? Le monde des mathématiques serait à beaucoup étranger sans les souvenirs d'école qui ressuscitent Euclide, Thalès, surtout Pythagore et son fameux théorème, dont Martin Gardner (né en 1914), un des papes des jeux mathématiques, a dénombré plus de 300 démonstrations.

Les mathématiques de Pythagore, l'arithmétique, la géométrie, l'astronomie et la musique sont, chez les Grecs, toute la science. Cette omniprésence des mathématiques marque à jamais les sciences naissantes ; jusqu'au XVIII^e siècle, les scientifiques restent polyvalents (pensons à Pascal, Descartes, Newton, Leibniz...), mais le développement de la science va entraîner des scissions, l'esprit humain ayant du mal à embrasser un trop vaste champ de connaissances. La physique se détache des mathématiques, puis la chimie de la physique et la biologie de la chimie. Enfin les techniques, applications pratiques, s'érigent aussi en disciplines autonomes et, aujourd'hui, l'informatique, tant à travers les logiciels qu'à travers le matériel, devient une science à part entière.

Entre pratique et théorie

Cependant, tous ces domaines garderont des traces de leurs liens antérieurs avec les mathématiques, et celles-ci, grâce à leur puissance symbolique, resteront l'outil nécessaire à chacun d'entre eux. Leur déraisonnable efficacité résulte de leur universalité, leur universalité de leur genèse.

Parallèlement, comme toute science, les mathématiques se développent aussi, soit en interne à partir des problèmes qu'elles se posent, soit à partir de questions que lui posent d'autres disciplines. Dans la pratique, ces deux aspects s'interpénètrent, et tel sujet qui semblait purement théorique se révèle brusquement utile : les exemples abondent et sont évoqués dans ce dossier.

Ce fut le cas de l'arithmétique, indispensable dans les systèmes de cryptographie modernes, ce qui induit aujourd'hui une intense recherche dans ce domaine.

Quand le mathématicien belge Adolphe Quételet développe la statistique au XIX^e siècle en jetant les bases de ce qu'il appelle « la théorie de l'homme moyen », il est vivement critiqué, mais aujourd'hui, la moyenne est partout, à l'INSEE, chez les assureurs, en météorologie, etc. C'est peut-être une langue d'Ésope dans la mesure où l'on ne doit pas surestimer sa valeur, mais son absence est cruelle (voir *Il n'y a pas moyen de moyenner !*, par Ph. Boulanger).

Quand Newton et Leibniz formalisent le calcul intégral, c'est avant tout pour étudier le mouvement, et ils seraient surpris de le voir appliquer dans une tannerie (voir *L'aire d'une peau de vache*, par Ph. Boulanger).

Pascal invente la théorie des probabilités pour venir en aide à un de ses amis qui ne comprenait pas pourquoi les paris qu'il prenait au jeu de dés lui étaient défavorables. Les probabilités sont aujourd'hui au cœur de la physique des particules et de la finance. La mathématique des jeux est un jeu de la vie, hélas trop souvent imparfait : l'économie le prouve (voir *Les meilleures stratégies*, d'après M. Gardner).

Quand Euler remarque et démontre qu'il y a une relation simple entre le nombre de faces, d'arêtes et de sommets d'un polyèdre, quand il étudie la possibilité d'un cheminement passant par les ponts de la ville de Königsberg, il établit les bases de la théorie des graphes (voir *De magnifiques démon-*

trations, par J. Lefort). Celle-ci permet aujourd'hui de créer et de gérer toutes sortes de réseaux (voir *L'exploration d'un labyrinthe*, par P. Tougne, et *Meurtre à Ghatleigh Grange*, par I. Stewart).

Nous n'en finirions pas de lister tous les sujets qui, partant dans une direction, ont bifurqué vers une autre avant d'être appliqués dans une troisième. Ce qui fait la grande unité des mathématiques, ce sont, avant tout, les méthodes de raisonnement qui sont utilisées dans le dossier au fil de ces sujets traités.

Les plaisirs de l'esprit

Ces méthodes semblent des drogues douces pour nos neurones, ce qui étonne ! Il faut le répéter : l'existence des jeux mathématiques est un petit miracle. Que les mathématiques, vilipendées pour la difficulté de leur apprentissage, la pédanterie de leur vocabulaire, leur rôle inquisitorial dans la sélection des élèves, l'aridité de leur abstraction, soient la source de jeux reste une divine surprise. Est-ce alors un miracle que les mathématiques soient la source de jeux ? Point.

Les explorations mathématiques participent de l'autosatisfaction légitime, de l'admiration que nous avons pour notre propre imagination et nos facultés de raisonnement, même quand elles sont prises au piège. La vogue persistante du Sudoku en témoigne, exemple parmi tant d'autres de l'excitation amenée par les petits « eurêka » successifs. Il y eut la mode du cube de Rubik et des puzzles de permutation, reprenant dans l'espace le jeu du taquin inventé par l'Américain Samuel Loyd (1841-1911) (voir *Du taquin à l'âne rouge*, par J. -P. Delahaye). Et l'on trouve partout des casse-tête topologiques. Que nous réserve l'avenir ? Gageons que la corne d'abondance est toujours pleine.

Dans l'agrément des jeux mathématiques, il y a la fascination pour des sujets que l'on penserait ne pas pouvoir mathématiser, comme celui

1. MONSIEUR BOILEAU AU CAFÉ, par Henri Toulouse-Lautrec (1893). Le joueur de dominos ne se doute peut-être pas des problématiques qui sont liées au jeu dont il apprécie la trompeuse simplicité.





2. DES JOUEURS DE DÉS.

Pascal inventa les probabilités pour mieux évaluer les résultats possibles de ce jeu de hasard.

du solitaire ou le parcours salvateur dans les labyrinthes. Il y a les étonnantes richesses des propriétés des nombres. Et, avec le plaisir des défis surmontés, il y a la joie d'exposer ses découvertes à un auditoire abasourdi ou interrogatif, mais toujours étonné.

Des mathématiciens célèbres ont consacré plusieurs ouvrages à des divertissements mathématiques. On peut d'ailleurs se demander si certains problèmes de partage de terrain que l'on trouve sur des tablettes d'argiles ou sur des papyrus ne sont pas déjà des problèmes artificiels présentés de façon plaisante à des fins didactiques. Au XVI^e siècle, Claude Gaspard Bachet de Méziriac (1581-1638) publie en 1612 *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres*. Plus tard, John Wallis (1616-1703) s'occupe du baguenaudier. Plus près de nous, à partir de 1882, Édouard Lucas (1842-1891) édite ses *Récréations mathématiques*, qui inspirent encore les passionnés.

Une diversité à explorer

Parmi les procédés stylistiques, il y a la mise en situation d'un personnage confronté à une énigme à résoudre (c'est le procédé favori de Ian Stewart) ; il y a l'approche philosophique montrant la pertinence de la réflexion sur une question récurrente ; il y a l'accumulation des propriétés ahurissantes de certains objets mathématiques. Il en est des méthodes d'exposition comme des genres littéraires : ils valent par la qualité des sujets et le talent du narrateur.

Existe-t-il des mathématiques importantes et d'autres plus accessoires qui seraient exploitées par les jeux mathématiques ? Comme il est difficile de répondre à la question ! De gigantesques pans des mathématiques sont nés d'une interrogation en théorie des nombres, telle la conjoncture de Fermat, selon laquelle il n'existait pas de solutions entières à $x^n + y^n = z^n$, pour n supérieur à 2. L'exemple est emblématique, mais il en apparaît tous les jours.

Le présent recueil explore les classiques renouvelés de jeux mathématiques vieux de plusieurs décennies, voire de plusieurs siècles, réexaminés à la lueur des avancées récentes. Il semblerait que les problèmes ne soient jamais épuisés et, comme le sphinx de ses cendres, ils renaissent de nouvelles particularités incongrues ou de nouvelles questions posées.

Si les mathématiques sont la plus ancienne des sciences, c'est peut-être qu'elles sont à la base de notre façon de penser, à la base du fonctionnement de notre cerveau, de sorte que nous retrouvons peut-être, dans leur pratique, des atavismes bien ancrés et mettons en œuvre une caractéristique essentielle de l'esprit humain.

Picorons ainsi dans ce recueil les facettes de notre réflexion au hasard des intérêts conjugués des auteurs et des lecteurs.

ÉNIGMATIQUE ÉPITAPHE

Le jeu mathématique est sûrement très ancien. Pour vous mettre en bouche, voici une devinette de la Grèce antique. Sur la tombe de Diophante d'Alexandrie, mathématicien du III^e ou IV^e siècle qui inspira Fermat, entre autres, on pouvait lire :

*Passant sous ce tombeau repose Diophante.
Ces quelques vers tracés par une main savante
Vont te faire connaître à quel âge il est mort.
Des jours assez nombreux que lui compta le sort,
Le sixième marqua le temps de son enfance ;
Le douzième fut pris par son adolescence.
Des sept parts de sa vie, une encore s'écoula.
Puis s'étant marié, sa femme lui donna
Cinq ans après un fils, qui, du destin sévère,
Reçut de jours hélas ! deux fois moins que son père.
De quatre ans, dans les pleurs, celui-ci survécut.
Dis, si tu sais compter, à quel âge il mourut.*

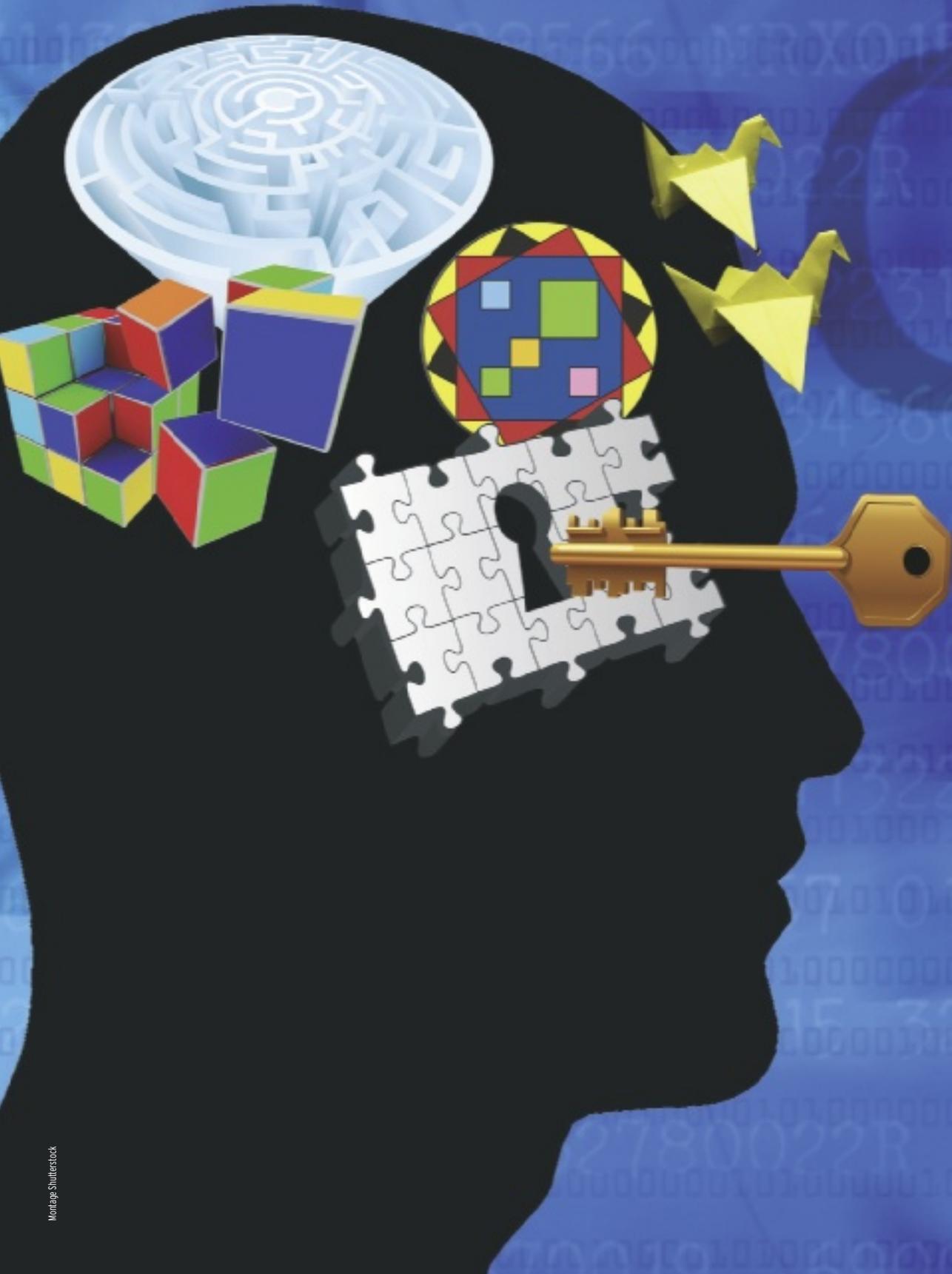
(Traduction en alexandrins d'Émile Fourrey, parue en 1899 dans ses *Récréations arithmétiques*, Vuibert.)

Le problème revient à résoudre l'équation du premier degré :
$$x/6 + x/12 + x/7 + 5 + x/2 + 4 = x.$$

On obtient $x = 84$ ans.

Jean LEFORT est ancien professeur de mathématiques en classe préparatoire et ancien animateur de l'IREM de Strasbourg.
Philippe BOULANGER est conseiller scientifique de la revue *Pour la science*.

La capacité d'analyse du cerveau humain est source de merveilleux prodiges : trier des nombres, calculer une surface, déceler des fausses pièces en les pesant, coder des messages et bien d'autres opérations accroissent notre compréhension du monde en créant de nouveaux jeux.



Explorations mathématiques

1

Le calculateur à spaghettis

Alexander DEWDNEY

Les calculateurs analogiques réalisent de petits miracles en résolvant par les lois de la physique des problèmes qui seraient longs à calculer sur ordinateur.

Aujourd'hui, les ordinateurs sont toujours des calculateurs numériques et nous avons presque oublié leurs cousins analogiques, ces appareils électromécaniques qui dominaient autrefois le monde du calcul automatique. Avant la dernière guerre, les grands laboratoires utilisaient des calculateurs analogiques perfectionnés. Ces machines tiraient parti des analogies entre les équations mathématiques et celles qui régissent des phénomènes électriques ou mécaniques : une variable était représentée par une grandeur physique (une tension électrique ou l'angle de rotation d'un axe). La valeur d'une de ces variables résolvait automatiquement l'équation cherchée.

Les machines analogiques n'ont pas résisté à la concurrence des ordinateurs numériques mis au point depuis la Deuxième Guerre mondiale. La révolution numérique est un fait acquis et irréversible, mais les révolutions nous font oublier les charmes d'une époque révolue...

L'agrément du calcul analogique est que l'on a l'impression de recevoir quelque chose sans contrepartie. On résout un problème, qui nécessiterait des heures de calcul avec un ordinateur numérique, en observant l'état d'équilibre d'un dispositif physique atteint presque instantanément.

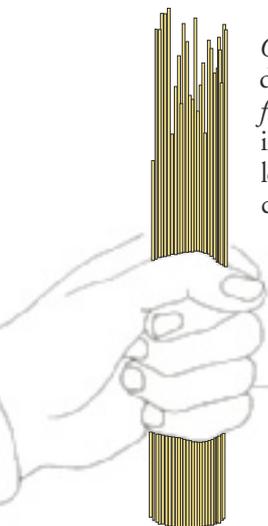
Considérons tout d'abord le calculateur GAS, ou *Gadget Analogique à Spaghettis*. Cet appareil est capable de classer les nombres par ordre décroissant (voir la figure 1). L'opération de tri est une tâche courante et il existe des algorithmes de tri très perfectionnés, mais le temps nécessaire pour ordonner une liste de nombres croît plus vite que la longueur de la liste. Avec le GAS, on consacre du temps à préparer la liste donnée de nombres à trier et à lire les résultats, mais le tri lui-même est instantané.

Pour chaque nombre de la liste, on prend un spaghetti cru et on le coupe à une longueur égale au nombre. On prend ensuite tous les spaghettis dans une main et, sans trop serrer, on plaque la

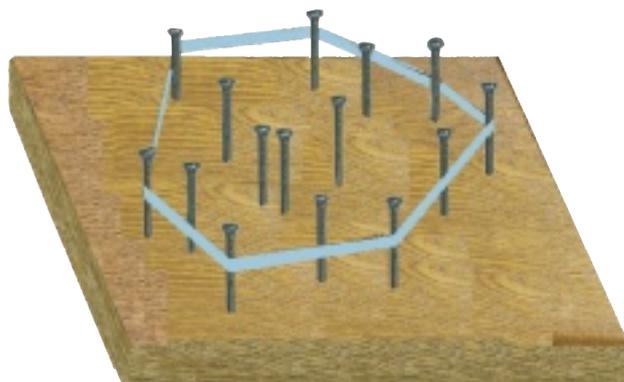
base de la botte (tenue verticalement) contre une table. L'extrémité inférieure de chaque spaghetti étant en contact avec la table : pour obtenir la séquence ordonnée des nombres, on retire d'abord le spaghetti le plus long, puis le plus long de ceux qui restent, et ainsi de suite jusqu'au dernier spaghetti. Chaque fois qu'on retire un spaghetti, on note sa longueur.

Distinguons trois phases dans cette méthode de classement : le prétraitement, la phase analogique et le post-traitement. Le prétraitement consiste à couper les spaghettis à la bonne longueur ; la phase analogique consiste à poser la botte sur la table ; lors du post-traitement, on retire les brins un par un pour obtenir la suite ordonnée. Tous les gadgets que nous allons considérer nécessitent un prétraitement et un post-traitement : les recherches sur les anciens calculateurs analogiques avaient pour but d'accélérer ces phases, mais la phase centrale est toujours rapide. Aussi, malgré la longueur de ses phases de prétraitement et de post-traitement, un grand GAS peut battre même les algorithmes de tri les plus rapides. Toutefois, pour trier des millions de nombres, il faudrait que nous utilisions une pelle mécanique capable de soulever et de tasser une botte de millions de très longs spaghettis crus soigneusement coupés !

Dans une alternative séduisante, quoique peu réaliste, du gadget de tri à spaghettis, on dispose d'un parc de voitures,



1. LE CALCULATEUR À SPAGHETTIS classe les nombres (les longueurs des spaghettis).



2. DÉTERMINATION DE L'ENVELOPPE convexe d'un ensemble de points dans le plan.

toutes identiques, en nombre égal à celui des nombres qu'il s'agit de classer. Chaque voiture reçoit une quantité de carburant proportionnelle au nombre qu'elle représente et une armée de conducteurs, tous de même poids, conduit sa voiture sur une route secondaire. Une voiture de contrôle, ayant reçu le plein de carburant, suit le convoi et note dans quel ordre les véhicules tombent en panne d'essence. C'est ainsi que le classement s'effectue !

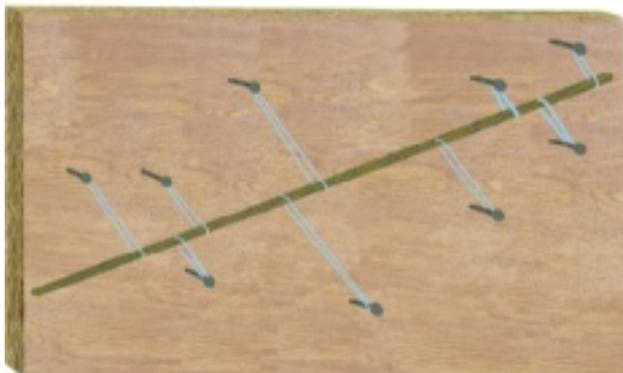
L'enveloppe convexe

Un second dispositif calcule l'enveloppe convexe d'un ensemble de n points du plan. L'enveloppe convexe est le plus petit domaine convexe qui contient les n points : elle est entièrement définie par sa frontière, un polygone dont chaque sommet est un point de l'ensemble. Le gadget comporte une grande planche, quelques clous et un élastique. Nous l'appellerons le GAE (*Gadget Analogique à Élastique*). Pour l'utiliser, on plante n clous aux emplacements correspondant à ceux des n points du plan. On étire ensuite un élastique pour qu'il entoure les clous et on le lâche : l'élastique se referme selon un contour polygonal qui est l'enveloppe convexe.

La durée de la tâche de prétraitement est proportionnelle au nombre n des données (il faut repérer la position correcte de chaque clou et enfoncer celui-ci dans la planche). Après avoir lâché le bracelet, le repérage des sommets du polygone prend un temps un peu moins que linéaire (il croît moins vite que n), car on ne note que les clous qui sont en contact avec le bracelet. L'algorithme le plus rapide de calcul numérique d'une enveloppe convexe requiert un nombre d'étapes de l'ordre de $n \log(\log n)$. Cette expression est si proche d'une fonction linéaire que, pour concurrencer l'algorithme, il faudrait un GAE de la taille du Système solaire...

Approximation linéaire

Un autre dispositif à élastique résout un problème de statistique au moyen d'une planchette de bois, de clous, d'élastiques et d'une tige. Lorsqu'on porte sur une feuille de papier millimétré une série de mesures, il arrive qu'elles soient à peu près alignées et qu'on veuille déterminer la ligne droite qui représente la meilleure approximation de ces mesures.



3. LA DROITE REPRÉSENTÉE PAR LA BARRE représente la meilleure approximation linéaire d'un ensemble de mesures.

Un gadget proposé par Mark Hawley indique une manière de trouver cette droite : on reporte tous les points sur une planchette de bois en plantant un clou à l'emplacement de chaque point ; on enfle sur la tige métallique des bracelets de caoutchouc tous identiques, en nombre égal à celui des clous ; on pose la tige sur la planche, et on accroche chacun des bracelets sur un des clous. Lorsque la tige est libérée, elle oscille jusqu'à l'équilibre (*voir la figure 3*). Cette position finale d'équilibre minimise l'énergie totale du système, donc la somme des distances entre les clous et la tige.

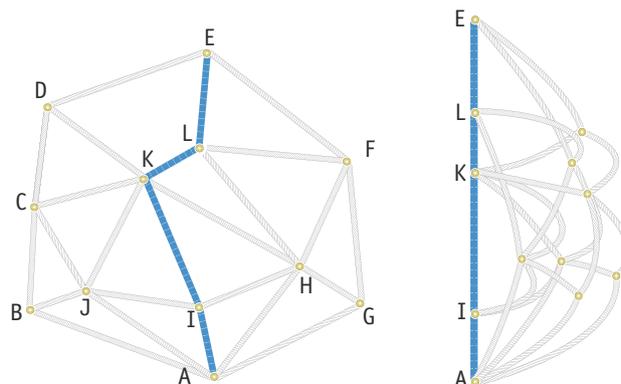
Plus court chemin

Un troisième dispositif détermine le plus court chemin reliant deux sommets d'un graphe (un graphe est un réseau de segments ou arêtes qui relient des points appelés sommets). Avec le GAF (*Gadget Analogique à Fils*), les arêtes sont matérialisées par des fils. Chaque sommet est constitué par un petit anneau métallique. Lorsque deux sommets du graphe sont reliés par une arête, les anneaux correspondants sont reliés par un fil coupé à la longueur appropriée et muni d'un crochet à chaque extrémité.

Pour trouver le chemin le plus court entre les sommets x et y d'un graphe, il suffit de soulever le réseau de fils par les anneaux x et y (un dans chaque main) et d'écarter les mains pour tendre les fils. Le chemin le plus court apparaît instantanément sous la forme d'une chaîne de brins tendus ; les brins qui ne font pas partie du chemin le plus court ne sont pas tendus (*voir la figure 4*). Si les anneaux sommets ont été étiquetés avec les noms des sommets, on établit la liste de ceux qui se trouvent sur le chemin le plus court.

Aussi bien le post-traitement que le prétraitement comportent un nombre de pas qui est au plus proportionnel au nombre n des sommets du graphe. Comme d'habitude, la phase analogique est pratiquement instantanée. En revanche, les algorithmes les plus rapides pour le calcul d'une solution numérique de ce problème comportent un nombre d'étapes de l'ordre de n^2 .

Certains gadgets ne nécessitent aucun traitement, parce qu'ils sont incorporés dans un ensemble capable d'utiliser directement leurs résultats. Deux exemples qui me viennent à l'esprit sont le trieur de cartes à aiguilles, autrefois très utilisé dans les bibliothèques, et un truc pour faire tenir une assiette garnie en équilibre sur un seul doigt. On



4. DÉTERMINATION DU PLUS COURT CHEMIN entre deux sommets d'un graphe.



utilisait le banc de tri à aiguilles pour trier un ensemble de cartes munies d'une série de trous et d'encoches ; dans les bibliothèques, pour déterminer les livres qui devaient rentrer un jour donné, on empilait les cartes et on enfilait une longue aiguille dans le trou qui correspondait au jour. Lorsque l'on soulevait le paquet de cartes avec l'aiguille, seules les cartes qui avaient un trou (et non une encoche) à cet emplacement sortaient du paquet.

Un « mathémagicien » des Laboratoires Bell, Ronald Graham, m'a montré le truc de l'assiette. On commence par placer l'assiette garnie de nourriture en équilibre sur le pouce et deux autres doigts, suffisamment écartés. Lorsque l'on rapproche les trois doigts, le centre de gravité de l'assiette reste à l'intérieur du triangle formé par leurs trois points d'appui (le mouvement est facile, car le doigt qui supporte le plus faible poids glisse plus facilement que les autres). On peut alors placer un quatrième doigt assez près du centre de gravité pour que l'assiette soit en équilibre sur ce doigt. R. Graham recommande aux débutants de s'entraîner longtemps avant de se risquer à une démonstration publique un soir de réveillon. On peut aussi trouver approximativement la position du centre de gravité d'une règle en bois ou d'un manche à balai en rapprochant les doigts les uns des autres en maintenant la règle en équilibre : le centre de gravité est toujours entre les deux doigts.

Longs temps de résolution

Les calculateurs analogiques pourraient-ils résoudre les problèmes longs à calculer, dits problèmes NP ? Ce sont les problèmes dont toute solution est facile à vérifier, mais dont le temps de résolution croît exponentiellement avec la taille du problème.

Un problème de ce type est de trouver, dans un graphe, le chemin le plus long reliant deux sommets, tâche beaucoup plus difficile que la détermination du chemin le plus court. Ce problème est dit NP complet (un problème est NP complet si tout problème NP peut lui être réduit), ce qui semble le condamner à ne pouvoir jamais être résolu par un algorithme utilisable (dont la résolution se fait en temps polynomial).

Il faut parfois faire un effort physique pour résoudre un tel problème ! Reprenons le réseau de fils qui, par extension, nous a permis de trouver le chemin le plus court entre deux points. Lorsque, après l'avoir tendu, nous tirons un peu plus fort, un des fils finit par se rompre, puis un autre. À la fin, juste avant que le réseau ne se sépare en deux morceaux, tous les fils encore intacts sont tendus, et nous avons ainsi résolu le problème du chemin le plus long. Mais l'avons-nous vraiment résolu ? Qu'est-ce qui nous prouve que ce sont les fils appartenant au chemin le plus court qui cassent en premier ?

Peut-être aurait-il fallu être plus méfiant à l'égard d'une méthode analogique aussi brutale de résolution d'un problème NP complet. Cependant, la théorie de la calculabilité nous dit seulement qu'il est très difficile de résoudre un tel problème avec un ordinateur ; rien ne prouve

qu'une méthode analogique ne peut pas réussir. Faisons donc une nouvelle tentative.

L'arbre minimal de Steiner

Le problème de l'arbre minimal de Steiner est le suivant : on cherche à relier n points d'un plan par un graphe de longueur totale minimale. Ce problème équivaut à celui de la liaison de n villes par un réseau de routes dont la longueur totale est minimale. Il est permis de prendre comme sommets du graphe d'autres points, en plus des n points donnés initialement (ils correspondent, dans le cas du réseau routier, à des carrefours en rase campagne). Le graphe minimal est nécessairement un arbre, c'est-à-dire un graphe qui ne comporte aucune boucle (une boucle est un parcours fermé). De plus, tous les sommets supplémentaires de l'arbre minimal sont reliés à trois autres sommets par des arêtes faisant entre elles des angles de 120 degrés (voir la figure 6).

Le problème de l'arbre minimal de Steiner est NP complet et on ne connaît pour le résoudre aucun algorithme qui comporte moins de 2^n pas de calcul (n est le nombre initial de sommets). Or le *Gadget Analogique à Bulles* résout ce problème ! Prenons deux feuilles rigides de plastique transparent, assemblons-les parallèlement et disposons des barrettes entre ces deux plans, aux emplacements des points à raccorder. Plongeons ensuite le tout dans de l'eau savonneuse : lorsque nous retirons le dispositif de l'eau, un film de savon relie les n barrettes et matérialise ainsi un arbre de Steiner.

Ne nous réjouissons pas trop vite de cette solution. Comment peut-on être sûr que l'arbre obtenu de cette façon est bien de longueur minimale ? Il est vrai que pour une topologie donnée, le film de savon emprunte toujours le chemin le plus court, mais il existe peut-être une autre topologie qui pourrait donner un arbre de longueur totale encore plus faible. La longueur du réseau dépend peut-être de l'angle sous lequel l'appareil est extrait du bain savonneux. Cette fois encore, la tentative de résolution analogique d'un problème NP complet se solde par un échec.

Le diamètre de l'arbre

Un très joli gadget à ficelles a été suggéré par Jos Wennmacker, de Nimègue ; il permet de déterminer le chemin le plus long que puisse parcourir un message dans un réseau de communication en forme d'arbre (c'est-à-dire sans boucle) ; les mathématiciens appellent cette distance le diamètre de l'arbre. Pour trouver cette distance, J. Wennmacker réalise un modèle du réseau en nouant des brins de ficelle, la longueur de chaque brin étant proportionnelle à celle d'une ligne du réseau. Le calcul ne comporte que deux opérations : (1) saisir le modèle par un nœud quelconque et le laisser pendre librement, (2) saisir le modèle par le point le plus bas et le laisser pendre à nouveau. Dans cette position, la hauteur totale du réseau représente le diamètre cherché (voir la figure 5).

En lisant cette description, j'ai cru que ce ne pouvait être aussi simple et qu'il fallait répéter l'opération consistant à repérer le point le plus bas et à faire pendre le réseau à partir de ce point. Or ce n'est pas nécessaire : deux opérations suffisent. À vous de le démontrer !



5. CE GADGET À FICELLES permet de trouver le chemin le plus long d'un graphe en forme d'arbre.

Aurions-nous donc réussi à démontrer la supériorité d'un dispositif analogique sur son cousin numérique ? Pas tout à fait, car dans le cas limité où le graphe a une forme d'arbre, il existe aussi un algorithme qui fournit une solution rapide à ce problème.

La flexion de la poutre

Un dispositif étrangement simple a été proposé par M. Laso, de l'École polytechnique de Zurich. Une poutre d'aluminium est serrée dans un étau par l'une de ses extrémités, et l'autre bout est muni d'une aiguille qui se déplace devant une échelle finement graduée (voir la figure 7).

Au niveau de l'étau, la poutre est parfaitement horizontale, mais à l'autre bout, elle fléchit. Selon la théorie de l'élasticité, la flexion d'une poutre sous l'effet de son propre poids est proportionnelle à la quatrième puissance de sa longueur. M. Laso ajoute que le même dispositif sert à calculer la racine quatrième d'un nombre ; il suffit de faire glisser la poutre dans l'étau jusqu'à ce que l'aiguille à l'extrémité indique un nombre donné sur la graduation. Nous pouvons modifier ce dispositif pour calculer les cubes et les racines cubiques : la poutre étant serrée dans une position déterminée, nous faisons en sorte que l'aiguille indique le zéro de l'échelle. Puis nous plaçons à l'extrémité de la poutre une masse proportionnelle à un nombre donné. La théorie de l'élasticité indique que la déformation est alors proportionnelle au cube de la surcharge.

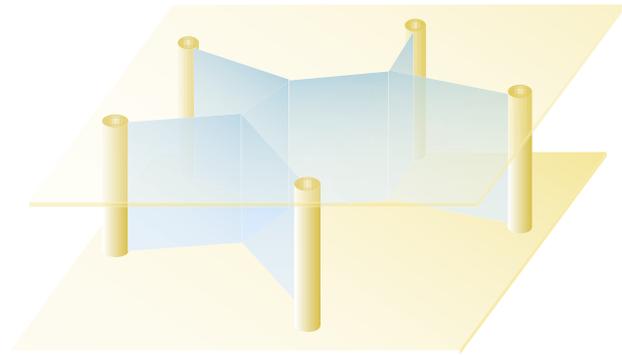
L'emplacement optimal

Une planchette de bois sur laquelle est collée une carte percée de trois trous nous servira de support à une optimisation.

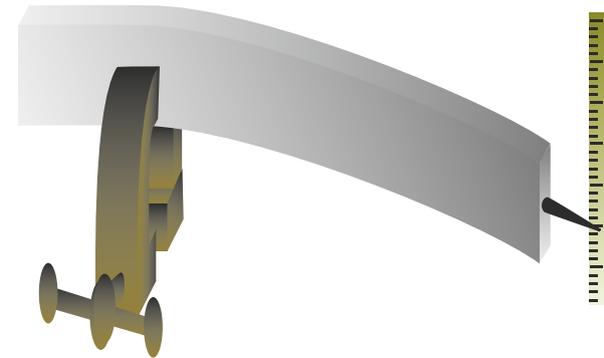
Par chaque trou passe une ficelle au bout de laquelle est attaché un poids. Les trois brins de ficelle aboutissent à un petit anneau situé au-dessus de la planche (voir la figure 8) indiquant l'emplacement optimal d'une usine de transformation, de façon à minimiser le coût total de transport des matières premières. Si les transports des trois matières premières coûtent respectivement A , B et C euros par tonne et par kilomètre, le coût total sera égal à $aA + bB + cC$, a , b et c étant les distances entre l'usine de traitement et les sources de matière première. Les trous sont percés aux endroits qui représentent les emplacements de ressources et, après avoir passé les ficelles dans ces trous, on choisit des poids proportionnels aux coûts unitaires A , B et C . Lorsqu'on libère ces poids, l'anneau se stabilise à l'endroit qui correspond sur la carte à l'emplacement idéal cherché.

Calculateurs à eau savonneuse

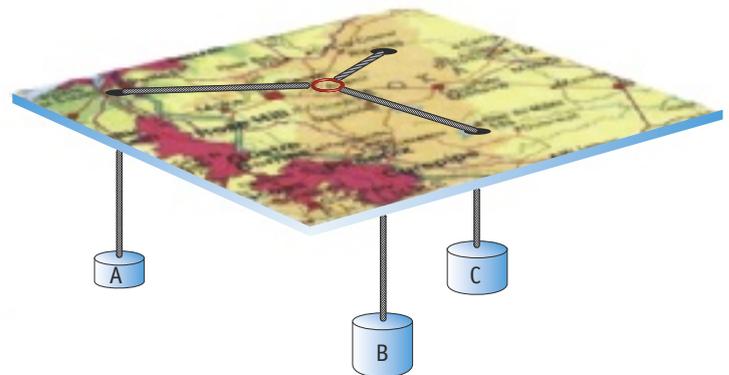
Dale Hoffman a attiré mon attention sur plusieurs calculateurs à eau savonneuse. Un film de savon tendu entre une plaque de verre horizontale et une surface comportant une marche constitue un modèle d'un rayon lumineux passant d'un milieu transparent dans un autre. Dans chaque milieu, la propagation est rectiligne, mais le rayon est réfracté à l'interface entre les deux milieux (voir la figure 9). Si l'on modifie



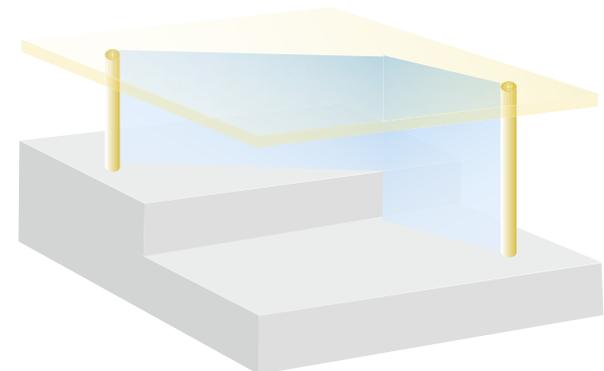
6. UN FILM DE SAVON résout le problème de l'arbre minimal de Steiner pour cinq points dans un plan.



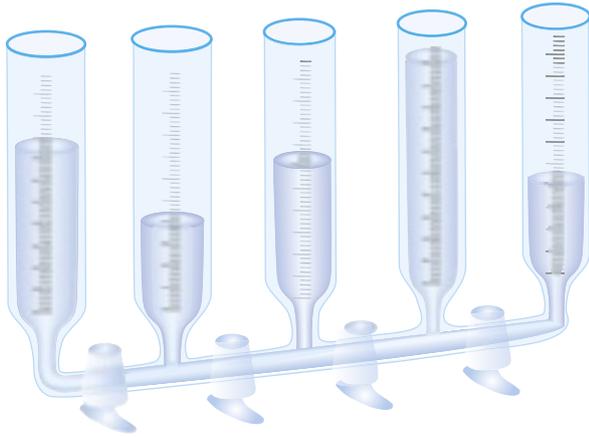
7. LA FLEXION D'UNE POUTRE (ici exagérée) permet de calculer la puissance quatrième d'un nombre ou sa racine quatrième.



8. DÉTERMINATION DE L'EMPLACEMENT OPTIMAL d'une usine de transformation par l'obtention automatique d'un barycentre.



9. DISPOSITIF HYDRAULIQUE POUR SIMULER LA RÉFRACTION : la hauteur de la marche fixe la différence d'indice entre deux milieux.



10. L'OUVERTURE DES ROBINETS détermine la moyenne des hauteurs d'eau initiales dans chaque récipient.

la hauteur de la marche, l'angle de réfraction change comme si les indices des milieux transparents étaient modifiés

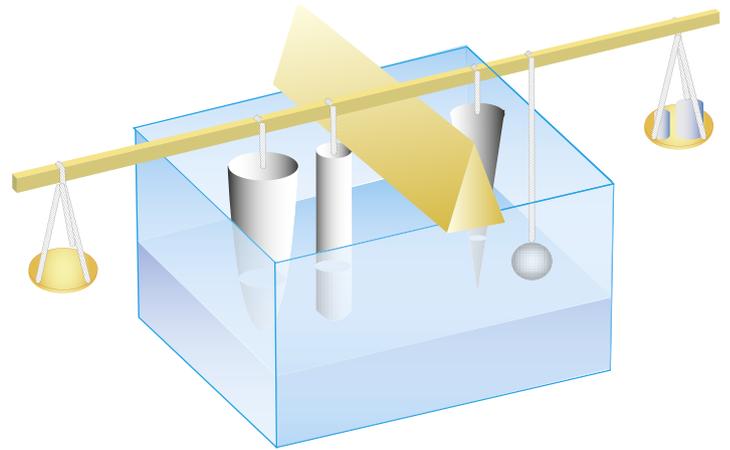
Cinq tubes de verre placés verticalement comportent des graduations (voir la figure 10) et communiquent par leur partie inférieure grâce à une tubulure. Des robinets permettent de couper la circulation de l'eau entre ces tubes. On peut donc remplir les tubes à des niveaux différents et les laisser dans cet état. Lorsque les robinets sont ouverts, le niveau de l'eau s'égalise dans les tubes, et le niveau final représente la moyenne arithmétique des niveaux initiaux. Ce dispositif est dû à Sartore Marco, de San Remo (Italie).

Le dernier gadget que je décrirai en détails a été suggéré par Peter Ash, de l'Université St. Joseph à Philadelphie. Il permet de résoudre des équations du troisième degré et pourrait être perfectionné pour résoudre des équations de degré plus élevé. L'équation du troisième degré se présente habituellement sous la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. La solution est une valeur de x qui annule le polynôme du premier membre.

Le gadget représenté sur la figure 11 est construit pour résoudre une équation du troisième degré. Il se compose d'un réservoir d'eau, d'un fléau de balance muni de deux plateaux et d'un ensemble de solides dont chacun représente un des termes de l'équation. On peut fabriquer ces solides sur un tour parce que ce sont des solides de révolution. Le terme en x^3 est matérialisé par un paraboléoïde : lorsqu'il est suspendu par sa base, le sommet étant immergé sur une profondeur x , il déplace un volume d'eau égal à x^3 centimètres cubes. Le terme en x^2 est représenté par un cône dont la pointe enfoncée de x déplace x^2 centimètres cubes. Un cylindre présente le terme en x , et une sphère représente le terme constant d (elle reste constamment immergée).

Le fléau de balance repose en son milieu sur un couteau et un plateau est suspendu à chaque extrémité. Les quatre solides sont suspendus au fléau et plongent dans le réservoir d'eau. Le paraboléoïde est accroché à la distance a centimètres du couteau, à droite ou à gauche selon que a est positif ou négatif. La même règle s'applique aux trois autres solides.

Pour résoudre l'équation, on commence par caler le fléau à l'horizontale et on remplit le réservoir de façon que trois des solides affleurent la surface liquide, la sphère étant complètement immergée. Si on libère le fléau, il sera vraisemblablement déséquilibré, et il faut ajouter des poids dans l'un des plateaux pour rétablir l'équilibre. C'est le niveau de l'eau à ce moment qui est pris comme origine.



11. LE REMPLISSAGE DE LA CUVE et l'équilibre du fléau déterminent la solution d'une équation du troisième degré.

Je n'ai décrit que les préparatifs, voici maintenant la phase de calcul. En ajoutant progressivement de l'eau dans le réservoir, le fléau commence par se déséquilibrer, mais pour une certaine quantité d'eau ajoutée, l'équilibre se rétablit. La hausse du niveau par rapport au niveau origine donne alors la solution de l'équation. Il peut évidemment arriver que l'équation n'ait pas de racine positive ; dans ce cas, on remplira complètement le réservoir sans parvenir à l'équilibre.

Comment fonctionne ce gadget remarquable ? En vertu du « principe » d'Archimède, le poids apparent d'un solide immergé diminue proportionnellement au volume immergé. L'équation d'équilibre du fléau contient cette perte de poids, affectée d'un coefficient égal à la distance entre le couteau et le point d'accrochage du solide. Le nouvel équilibre est atteint pour un niveau d'eau tel qu'il y ait exacte compensation entre les poids apparents de tous les solides immergés, ce qui a lieu quand l'équation est satisfaite.

Martien Gardner !

Nous ajouterons le dispositif analogique ultime. Un extraterrestre (que nous appellerons, si vous le voulez bien, Martien Gardner, en hommage au créateur de jeux mathématiques bien connu) débarque un jour de son vaisseau spatial et entreprend de convertir en un seul nombre gigantesque le texte de tous les livres écrits par les humains. Le principe est simple : un livre n'étant qu'une longue suite de mots, il est toujours possible de le coder sous forme d'une longue suite de chiffres. Lorsqu'il a construit cette suite, l'extraterrestre la fait simplement précéder de « 0, » la transformant ainsi en une fraction décimale. Puis il sort de son vaisseau spatial une magnifique tige de « duron » et y grave une marque qui partage la longueur de la tige dans le rapport exact exprimé par cette fraction décimale. C'est ainsi que toute la tradition écrite de l'humanité peut se réduire à un trait gravé sur une baguette.

Plus fort encore : si π est un nombre univers, c'est-à-dire un nombre qui contient toutes les suites de nombres possibles, alors π contient toutes les histoires possibles codées en transformant chaque lettre en chiffre ; il contenait même cet article avant qu'il soit écrit.

Alexander DEWDNEY est mathématicien et philosophe : il est professeur émérite de l'Université de Western Ontario.

L'aire d'une peau de vache

Philippe BOULANGER

Une machine analogique permet de mesurer les aires en utilisant une propriété du trapèze : *Sancta simplicitas*.

Regrettera qui veut le bon vieux temps des machines analogiques... Il n'empêche que certaines fleurissent bon l'inventivité et tiraient parti des propriétés géométriques. C'est le cas de l'appareil observé dans une tannerie par le regretté André Viricel et publié en février 1978 dans le très intéressant journal dirigé par Yves Roussel qu'était *Le petit Archimède*.

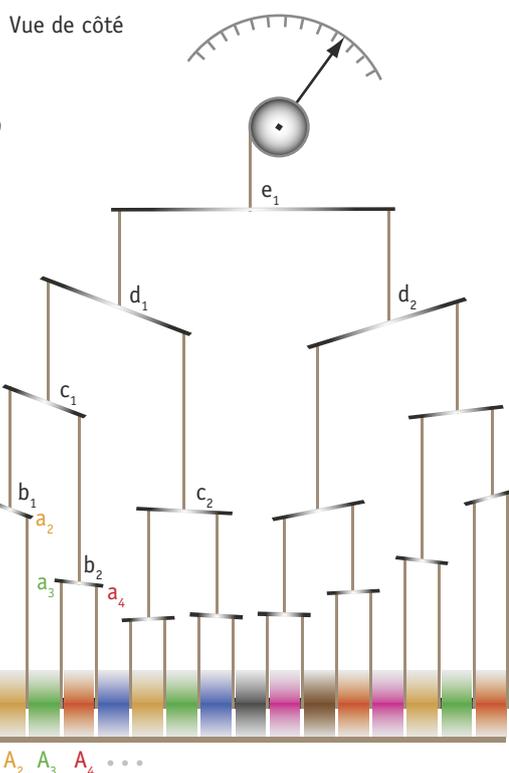
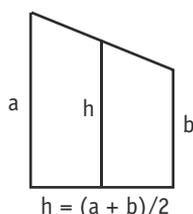
Cet appareil est une table sur laquelle on dépose la peau de vache et sur laquelle roule une rangée de roulettes, chaque roulette ne tournant que lorsqu'elle est au contact de la peau. Ainsi les roulettes de la figure ci-dessous mesurent (approximativement) l'aire de bandes de la peau. L'intérêt de l'appareil est dans l'addition des aires : chaque roulette A_i fait tourner, en roulant sur la peau de vache, un petit tambour coaxial solidaire de la roulette. Sur ce tambour s'enroule un cordon attaché au point a_i d'une baguette. Le point a_i descend d'une longueur l_i

proportionnelle à la longueur du contact entre la roulette et la peau, donc à l'aire d'une bande.

Les roulettes sont groupées comme l'indique la figure de droite. La propriété du trapèze indique que le milieu b_1 de a_1a_2 descend de $(l_1 + l_2)/2$ et le milieu b_2 de a_3a_4 de $(l_3 + l_4)/2$. Le milieu c_1 de b_1b_2 descend de $[(l_1 + l_2)/2 + (l_3 + l_4)/2]/2$, soit de $(l_1 + l_2 + l_3 + l_4)/4$, et ainsi de suite.

Il suffit donc de mesurer la descente du point d'attache le plus élevé. Dans l'appareil décrit par André Viricel et représenté schématiquement sur la figure, cette descente fait tourner un disque lié à une aiguille qui permet la lecture directe de l'aire de la peau. Cet appareil de tannerie est wagnérien dans la mesure où l'on se tanne aux aires.

On a, bien entendu, ajoute Viricel, fait passer sur la table un carton dont l'aire est connue, de l'ordre de grandeur de celle de la peau de vache, pour étalonner l'appareil : cette méthode évite le calcul des constantes de proportionnalité.



Les problèmes de pesées

Michel CRITON

Les mathématiciens proposent de nouvelles variantes de pesées pour les masses marquées et l'identification des pièces contrefaites.

Dans toutes les civilisations, les pesées apparaissent à des fins commerciales et dans des considérations morales : les Égyptiens pesaient les âmes et les Chrétiens évoquaient le poids des péchés.

Les mathématiciens se sont tout d'abord intéressés aux systèmes de poids marqués les plus efficaces. Dans ce type de problèmes, comme celui de l'ensemble optimal des dénominations des pièces et des billets de banque, on limite, soit le nombre de poids identiques (à la limite, on utiliserait un seul poids, le poids unité, n fois), soit le nombre de poids différents (à la limite aussi, on utiliserait n poids égaux à 1, 2, 3... n , et il suffirait, pour chaque pesée, d'un seul poids).

La première mention en Occident d'un système qui permet de peser la plus grande variété de poids avec le plus petit nombre de poids différents remonte au début du XIII^e siècle avec Léonard de Pise, *alias* Fibonacci. Celui-ci était le fils d'un marchand de Pise établi à Bejaïa (Bougie), en Afrique du Nord. Il reçut une éducation mathématique qui lui permit d'intégrer les avancées des mathématiques arabes, alors en plein essor. Dans son *Liber Abaci* (1202), Fibonacci propose ce problème : *Comment utiliser cinq vases d'argent de masses respectives 1, 2, 4, 8 et 15 livres pour payer à un homme un salaire journalier d'une livre d'argent pendant 30 jours ?*

La solution repose sur le système binaire (on décompose les salaires en puissance de deux), à ceci près qu'on ne dispose pas de la valeur 16, mais de la valeur 15 ! Cette particularité (on ignore à quoi elle correspondait dans l'esprit de Fibonacci) a pour conséquence une

double décomposition de 15 : 15 ou $1 + 2 + 4 + 8$. Elle implique également un « rendu de monnaie » ; le deuxième jour par exemple, l'ouvrier rend le vase d'argent d'une livre en échange de celui de deux livres. Ce problème n'est pas à proprement parler un problème de pesée, mais il lui est équivalent, car les poids marqués ne peuvent être posés que sur un seul plateau de la balance. On trouve aussi chez Léonard ce problème : *Un marchand dispose de quatre poids qui lui permettent de peser tout objet dont le poids est un nombre entier de livres entre 1 et 40 inclus. Quels sont ces quatre poids ?*

Ces mêmes questions sont à nouveau évoquées en 1484 par Nicolas Chuquet, dans son *Triparty en la science des nombres*, puis en 1494 par Luca Pacioli dans la *Summa de arithmetica, geometria, de proportioni et de proportionalita*, et par leurs nombreux successeurs.

L'explication de Bachet

Il faudra attendre les *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres*, recueil de problèmes récréatifs publié par Claude-Gaspar Bachet de Méziriac en 1612 pour que le problème soit posé dans une langue qui nous soit accessible, avec toutefois la difficulté que le nombre minimal de poids n'est pas donné. Bachet nous dit : *Étant donné telle quantité qu'on voudra pesant un nombre de livres depuis 1 jusques à 40 inclusivement (sans toutefois admettre les fractions), on demande combien de poids pour le moins il faudrait employer à cet effet.*

1. SOLUTION DE BACHET DE MÉZIRIAC pour peser les masses de 1 à 13 unités avec 4 poids.

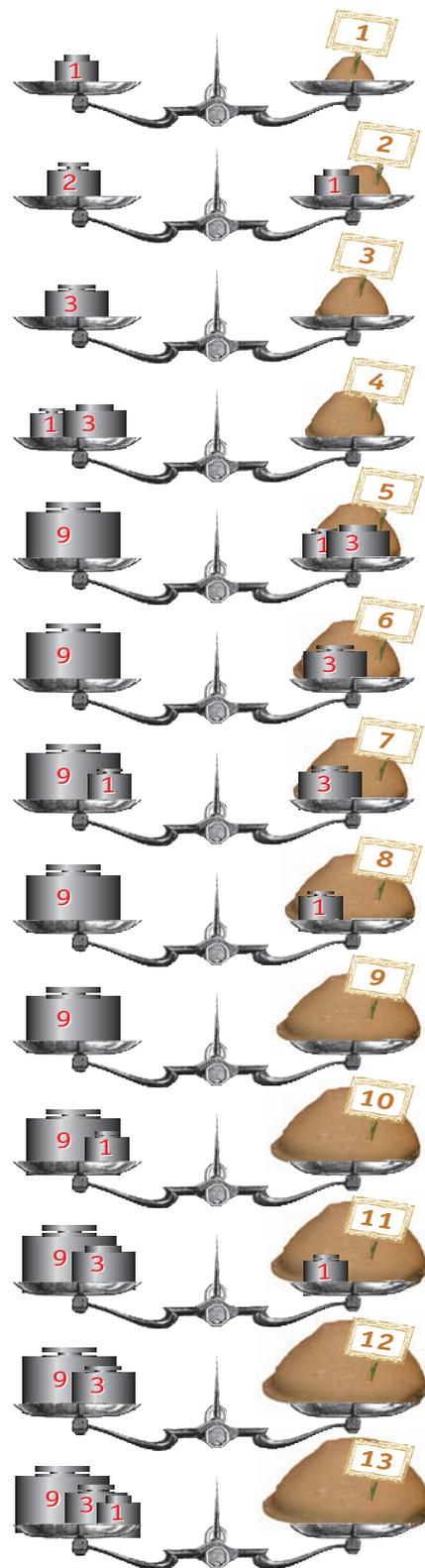




Photo RMN/Daniel Arnaudet

2. LE PRÊTEUR ET SA FEMME (1514) pèsent les monnaies. Tableau du peintre flamand Quentin Metsys.

Il s'agit ici bien sûr d'utiliser une balance à deux plateaux, sur lesquels il est possible de poser les poids marqués selon la masse à équilibrer.

Bachet montre pas à pas que le système de poids égaux aux puissances de 3 successives : 1, 3, 9, 27... est le système optimal (voir la figure 1), c'est-à-dire le plus économique en nombre de poids marqués tous différents permettant de réaliser tous les poids entiers de 1 à $(3^{n+1} - 1) / 2$, où 3^n est la masse la plus élevée dont on dispose. Bachet note au passage que la somme des puissances de 3 d'exposants allant de 0 à n est égale à $(3^{n+1} - 1) / 2$.

Pourquoi la base trois ?

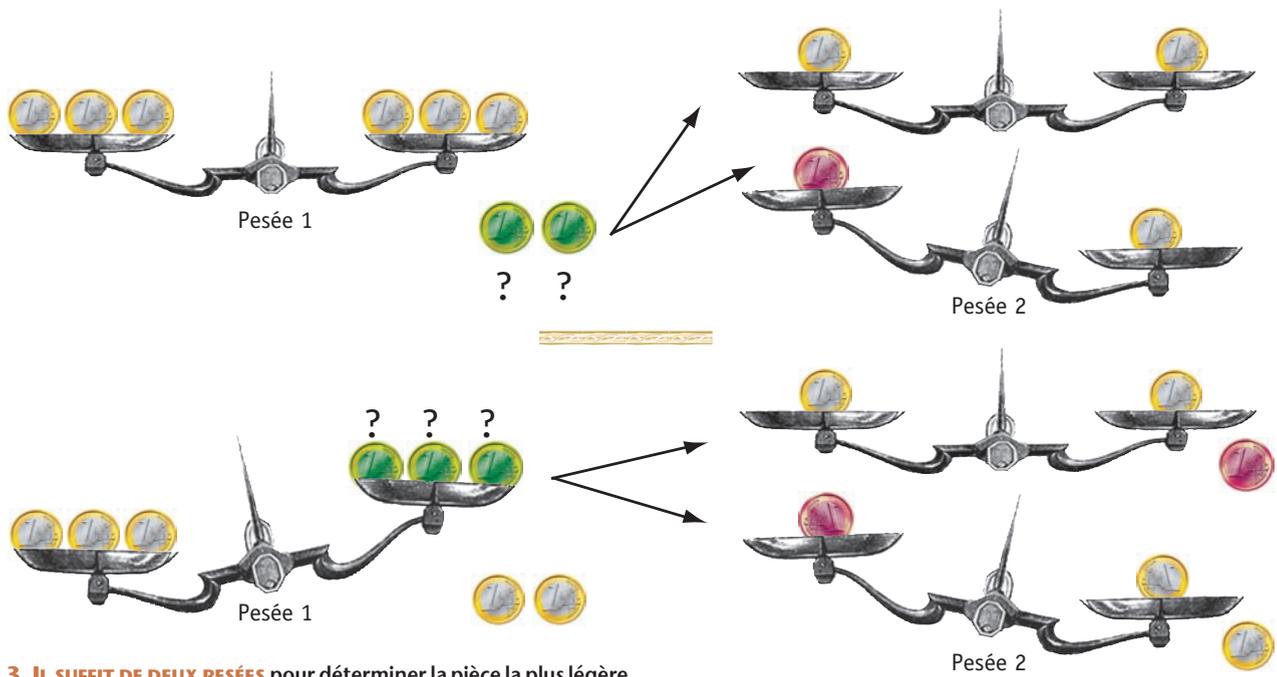
Pourquoi la base trois intervient-elle alors que la base deux semble convenir, car tout nombre entier s'écrit de façon unique en base deux ? Ainsi 154 se décompose en $1 \times 128 + 0 \times 64 + 0 \times 32 + 1 \times 16 + 1 \times 8 + 0 \times 4 + 1 \times 2 + 0 \times 1$, ce qui correspond à l'écriture binaire 10011010. On peut ainsi équilibrer un objet de 154 g avec un poids de 128 g (2^7 g), un poids de 16 g (2^4 g), un poids de 4 g (2^2 g) et un poids de 2 g (2^1 g), tous les poids étant placés sur le même plateau.

En base trois, 154 se décompose en $1 \times 81 + 2 \times 27 + 2 \times 9 + 0 \times 3 + 1 \times 1$, ce qui correspond à l'écriture ternaire 12201. D'après cette écriture, nous pourrions équilibrer notre objet de 154 g avec un poids de 81 g (3^4 g), deux poids de 27 g (3^3 g), deux poids de 9 g (3^2 g) et un poids de 1 g (3^0 g), cette fois encore tous posés sur un même plateau. Mais nous utilisons deux fois des poids identiques et nous n'exploitons pas les possibilités offertes par le second plateau.

Interdisons-nous le chiffre 2 dans l'écriture d'un nombre en base trois, en utilisant le chiffre -1. Pour cela, utilisons le fait que $2 = 3 - 1$, d'où $2 \times 3^k = 3^{k+1} - 3^k$. Cela revient à remplacer le poids p , qui est en double exemplaire dans le plateau de gauche, par le poids de valeur immédiatement supérieure et à mettre un poids p dans le plateau de droite. Reprenons l'exemple de 154 écrit en base trois pour montrer la procédure. $1\ 2\ 2\ 0\ 1 \rightarrow 1\ (2+1) - 1\ 0\ 1$ (on remplace le 2 le plus à droite par -1 et on ajoute une unité au rang situé immédiatement à gauche) $\rightarrow 2\ 0 - 1\ 0\ 1$ (on remplace (2+1) par 0 et on ajoute une unité au rang situé immédiatement à gauche) $\rightarrow 1 - 1\ 0 - 1\ 0\ 1$ (on remplace le 2 que l'on vient d'obtenir par -1 et on ajoute 1 au rang situé immédiatement à gauche). La procédure est simple : elle rappelle la technique utilisée pour effectuer des calculs sur des durées exprimées en heures, minutes et secondes.

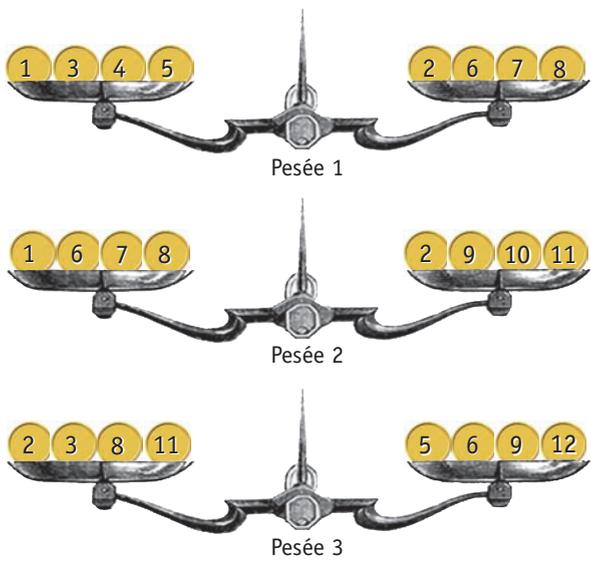
On part de la droite de l'écriture du nombre en ternaire. À chaque fois que l'on rencontre un 2, on le remplace par -1 en ajoutant une unité au rang situé immédiatement à sa gauche. Lorsque cet ajout d'unité donne 3, on écrit 0 et on ajoute à nouveau une unité immédiatement à gauche. On s'arrête lorsque tous les chiffres écrits appartiennent à l'ensemble $\{-1; 0; 1\}$. L'unicité de l'écriture d'un nombre est préservée dans ce système.

Le résultat nous indique directement comment placer les poids marqués sur les deux plateaux de la balance : chaque 1 correspond à une masse placée sur le plateau de gauche et chaque -1 à une masse placée sur le plateau de droite, en compagnie de l'objet à peser. Ainsi, 154 grammes = 243 g - 81 g - 9 g + 1 g. On place donc les poids de 243 g et 1 g à gauche, et les poids de 81 g et 9 g à droite, avec l'objet à peser. Ce système ternaire est optimal.



3. IL SUFFIT DE DEUX PESÉES pour déterminer la pièce la plus légère parmi huit (à condition d'être certain qu'il y a une pièce légère).

L'autre grand problème sur les pesées n'utilise aucune masse marquée. Il consiste seulement à identifier, en un nombre minimal de pesées, une fausse pièce de poids différent parmi n pièces en apparence identiques.



Vraies et fausses pièces

La première occurrence connue de ce type de problèmes est la publication en janvier 1945, dans la rubrique « problèmes » de l'*American Mathematical Monthly*, de l'énoncé E651 proposé par Emil Schell : *Vous disposez de huit pièces identiques et d'une balance Roberval. Il se peut qu'une des huit pièces soit fausse et plus légère que les autres. Comment pouvez-vous déterminer s'il y a bien une fausse pièce parmi les huit et, dans ce cas, laquelle, en effectuant seulement deux pesées ?* E. Schell déclarera plus tard qu'il n'est pas l'auteur de ce problème, mais que celui-ci circulait parmi les mathématiciens à la fin des années 1930.

La solution de ce problème consiste à diviser l'ensemble des huit pièces en trois sous-ensembles comptant respectivement 3, 3 et 2 pièces (voir la figure 3). On compare les deux ensembles de 3 pièces. S'il y a équilibre, il y a éventuellement une fausse pièce parmi les deux restantes. Il suffit de les comparer pour la déterminer, si elle existe. S'il n'y a pas équilibre, le plateau le plus haut contient une fausse pièce. On prend alors deux des trois pièces de ce plateau et on les compare. S'il n'y a pas équilibre, la pièce la plus légère est la fausse, et s'il y a équilibre, il s'agit de la pièce laissée de côté.

On notera deux variantes possibles de ce problème selon que l'existence d'une pièce différente des autres est une certitude ou seulement une possibilité. Dans le premier cas, on aurait la même stratégie avec 9 pièces au lieu de 8. Dans le second cas (celui du problème posé par E. Schell), 8 est le nombre maximal de pièces pour 2 pesées. En effet, dans le pire des cas (équilibre pour la comparaison de 3 pièces avec 3 autres pièces, puis équilibre pour la comparaison de 2 des 3 pièces restantes), il resterait un doute sur la neuvième pièce, qui pourrait alors être fausse ou ne pas l'être.

La solution du problème de E. Schell a été rapidement généralisée. Si l'on sait qu'une pièce est plus légère que les

PESÉES			CONCLUSIONS	PESÉES			CONCLUSIONS
1	2	3		1	2	3	
↘	↘	↑	1 + légère	↘	↘	↑	1 + lourde
↘	↘	↘	2 + légère	↘	↘	↘	2 + lourde
↘	↑	↘	3 + légère	↘	↑	↘	3 + lourde
↘	↑	↑	4 + légère	↘	↑	↑	4 + lourde
↘	↑	↘	5 + légère	↘	↑	↘	5 + lourde
↘	↘	↘	6 + légère	↘	↘	↘	6 + lourde
↘	↘	↑	7 + légère	↘	↘	↑	7 + lourde
↘	↘	↘	8 + légère	↘	↘	↘	8 + lourde
↑	↘	↘	9 + légère	↑	↘	↘	9 + lourde
↑	↘	↑	10 + légère	↑	↘	↑	10 + lourde
↑	↑	↘	11 + légère	↑	↑	↘	11 + lourde
↑	↑	↘	12 + légère	↑	↑	↘	12 + lourde

4. TROIS PESÉES suffisent pour trouver la pièce la plus légère ou la plus lourde.

autres parmi N pièces et si $3^{n-1} \leq N < 3n$, alors la fausse pièce peut être déterminée en au plus n pesées. Le nombre de pesées nécessaires est ainsi égal au plus petit entier supérieur ou égal à $\log_3(N)$. Mais si l'existence d'une pièce plus légère que les autres parmi N pièces n'est pas certaine, N doit vérifier $3^{n-1} \leq N < 3^n$ pour que n pesées déterminent qu'il existe une pièce plus légère et laquelle.

Cela est facile à comprendre. On divise l'ensemble des pièces à tester en trois sous-ensembles : deux qui contiendront le même nombre de pièces et qu'on posera sur les deux plateaux de la balance et un reste (inférieur ou égal au nombre de pièces posées sur un plateau, mais le plus grand possible) qu'on laissera de côté. Une pesée permet de déterminer dans lequel des trois sous-ensembles se trouve la fausse pièce. On est alors ramené au même problème avec un nombre de pièces sensiblement trois fois plus petit.

Plus légère ou plus lourde ?

Une variante du problème initial apparaît ensuite, où l'on sait qu'il existe une fausse pièce, en ignorant cependant si celle-ci est plus légère ou plus lourde que les autres. Il existe alors deux niveaux de résolution possible : on peut simplement déterminer quelle est la fausse pièce (en ignorant éventuellement si elle est plus légère ou plus lourde que les autres), ou bien on peut la déterminer en sachant comment se situe son poids par rapport à celui des autres pièces.

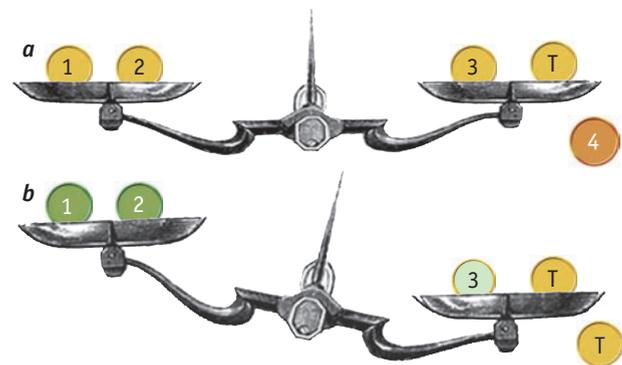
N. Fine étudie le problème dans le numéro d'octobre 1947 de l'*American Mathematical Monthly*. Pour une étude en français, on pourra consulter un article d'Alain Ghouila-Houri sur le sujet, paru en 1964 dans le numéro d'été de la revue *Mathématiques et Sciences humaines*, article accessible sur le site internet Numdam (archives de revues de mathématiques numérisées).

Si l'on veut identifier une fausse pièce parmi N pièces en sachant si elle est plus lourde ou plus légère que les autres, le nombre minimal de pesées nécessaire est l'unique n , tel que $(3^{n-1} - 1) / 2 \leq N < (3^n - 1) / 2$. La démonstration de cette propriété se fait par récurrence.

Montrons comment peut fonctionner la méthode à utiliser pour 12 pièces en notant que $12 = (3^3 - 3) / 2$. On effectue trois pesées en répartissant les pièces sur les plateaux comme l'indique la figure 4. Analysons les résultats possibles de ces trois pesées. On note que 24 possibilités figurent dans ce tableau. Il en manque trois. La première est celle où, dans les trois pesées, les balances seraient à l'équilibre. Il n'y aurait alors aucune pièce fautive, contrairement à l'hypothèse. La seconde et la troisième sont celles où, dans les trois pesées, le même plateau, celui de gauche ou celui de droite, serait plus lourd que l'autre. Ces deux cas sont impossibles, car une même pièce n'est jamais posée trois fois dans le même plateau.

On retrouve le système ternaire en identifiant le symbole de plateau de gauche descendant à -1 , le symbole à 0 à l'équilibre et le symbole de plateau de droite descendant à 1 .

Si l'on se contente d'identifier la fausse pièce sans savoir si elle est plus légère ou plus lourde, on peut avoir une pièce de plus, mise de côté, qui serait la fausse pièce dans le cas où toutes les pesées se solderaient par un équilibre.



5. DEUX PESÉES SUFFISENT (avec une pièce témoin T) pour déterminer une pièce légère ou lourde parmi quatre pièces.

Une pièce témoin

Dans un dernier avatar du problème, on suppose qu'en plus des N pièces, dont on ignore laquelle est fautive, on dispose d'une pièce témoin T , dont on sait qu'elle est bonne. On a démontré qu'en n pesées, on pouvait déterminer la fausse pièce parmi un nombre maximal de pièces égal à $(3^n - 1) / 2$, sans compter la pièce témoin, soit une pièce de plus que précédemment. En trois pesées, on peut donc retrouver une fausse pièce parmi 13, en deux pesées, une pièce fautive parmi 4.

L'algorithme est alors plus délicat à mettre en œuvre. Montrons comment il fonctionne avec n égal à 4. On écarte une pièce autre que la pièce témoin, et on répartit les quatre autres sur les deux plateaux. S'il y a équilibre (a sur la figure 5), la fautive pièce est la pièce 4. Il suffit ensuite de la comparer avec la pièce témoin pour savoir si elle est plus lourde ou plus légère.

S'il n'y a pas équilibre (b sur la figure), la pièce 4 est une bonne pièce et elle devient alors une pièce témoin. Il se peut alors qu'une des deux pièces du plateau le plus léger (la pièce 1 ou la pièce 2) soit plus légère que les autres. On compare alors ces deux pièces. S'il y a équilibre, la fautive pièce est la pièce 3 et elle est plus lourde que les autres. S'il n'y a pas équilibre, la fautive pièce est la pièce la plus légère, et elle est plus légère que les autres. On procéderait de même en échangeant « légère » et « lourde » dans le cas où le plateau contenant la pièce témoin serait en position haute. Dans le cas de 13 pièces, on commencerait par répartir les pièces en 5 pièces sur un plateau, 5 pièces dont la pièce témoin sur l'autre et 4 pièces mises de côté. Dans un article cité en bibliographie, Hervé Lehning met en évidence une récurrence dans la mise en œuvre de cette méthode.

D'autres variantes plus complexes n'ont pas encore livré tous leurs secrets. Les N pièces peuvent contenir 2 fautes pièces (dont les poids peuvent être les mêmes ou non, et dont la somme des poids peut éventuellement être égale à la somme des poids de deux vraies pièces, ce qui corse évidemment le problème). Elles peuvent contenir k fautes pièces (k inférieur à N), etc.

Michel CRITON est président de la Fédération française des jeux mathématiques.

Claude-Gaspar BACHET DE MÉZIRIAC, *Problème plaisants et délectables qui se font par les nombres*, réédition Blanchard, 1993.

Jean-Claude BAILLIF, *Les casse-tête logiques de Baillif*, Dunod, 1979.

Alain ZALMANSKI, *Problèmes de pesées*, in *Math et Jeux d'Hanoi, d'Aujourd'hui, d'Hier, d'Ailleurs*, ADCS, 2006.

Cryptographie :

les codes à substitution

Hervé LEHNING

Jules César codait ses messages en décalant les lettres, la substitution alphabétique la plus simple qui soit. La compétition entre codeurs et décodeurs qui s'ensuit mène à nos jours, au téléphone rouge et à la cryptographie quantique.

Fh grvvlhu yd yrxcv dssuhqguh d ghfubswhu ohv frghv ohv soxv frxudqvw hw d fuhhu yrwuh sursuh frgh lqylro-deoh ! Fhfl judfh d od phwkrgh ghv iuhthxqfhv hw o lqglfh gh iulhgpdq. Eseedjh dxvvl d vrq lpsruwdqfh. Oh wrxcv hwv frxurqqh sdu od pgwkrgh gh yhuqdp.

Ce texte est codé, c'est manifeste ! Comment ? Il n'est guère difficile de répondre à cette question à cause des espaces laissés entre les mots. Nous en repérons ainsi deux d'une seule lettre, ce qui est rare en français. Le plus fréquent est le « a ». Le même mot « d » se trouvant quatre fois, gageons qu'il s'agit de ce cas. Si le texte a été codé par décalage des lettres, nous en avons la clef : « a » devient « d », donc « b », « e », etc. En opérant le décalage inverse, nous obtenons un texte ayant un sens, que nous voyons plus loin. Comment douter qu'il s'agit du texte d'origine ?

On appelle souvent ce type de substitution un « code César » : le général romain n'en fut pas l'inventeur, mais en fit usage.

Une précaution du codeur

S'il ne veut pas que ses messages soient décodés par une personne non autorisée, le codeur doit éviter de semer de tels indices. Une idée simple est de ne laisser aucun espace entre les mots, d'ignorer la ponctuation et d'écrire en lettres capitales. On regroupe ensuite le texte codé en mots fictifs de cinq lettres. Cette méthode facilite le contrôle des transmissions. Le message précédent devient alors :

FHGRV VLHUY DYRXV DSSUH
QGUHD GHFUB SWHUO HVFRG
HVOHV SOXVF RXUDQ WVHWD
FUHHU YRWUH SRSUJ HFRGH
LQYLR ODEOH FHFLJ UDFHD

ODPHW KRGGH HVIUH TXHQF HVHWO LQGLF
HGHIU LHGPD QESEE DJHDX VVLDV RQLPS
RUWDQ FHOHW RXWHV WFRXU RQQHS DUODP
GWKRG HGHYH UQDP

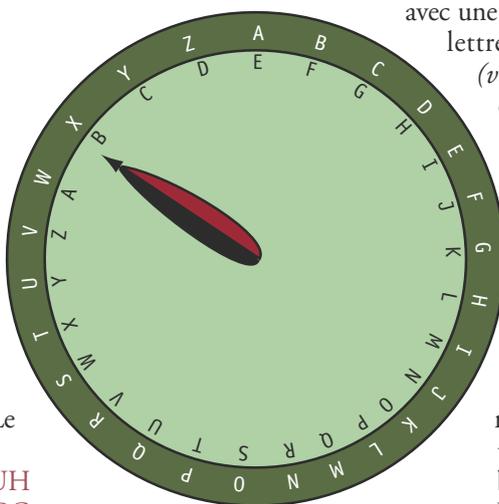
Si l'on ne connaît pas la clef, le décodage est plus difficile qu'avec des blancs. Bien sûr, si nous savons qu'elle consiste en un décalage, nous pouvons essayer les 25 possibilités. L'utilisation de 25 esclaves en parallèle suffit pour accomplir cette tâche rapidement ! Elle devient cependant quasiment impossible si le codage correspond à une substitution alphabétique où le décalage n'est pas constant, comme le code AtBash qui consiste à écrire l'alphabet à l'envers.

La méthode des fréquences

Un savant arabe du Moyen Âge, Abu Yusuf al-Kindi, constata que, dans tout texte assez long, chaque lettre se répète avec une fréquence qui lui est propre. Ainsi, la lettre la plus fréquente en français est E (voir la figure 2), il suffit de la repérer dans un texte codé par décalage pour en trouver la clef. Ici, nous trouvons 36 H sur 204 lettres, soit une fréquence de 17,6 pour cent. L'hypothèse la plus vraisemblable est que E est devenu H, soit un décalage de trois. Par rapport à la méthode précédente, le décodage a demandé un seul calcul supplémentaire.

Voyons comment utiliser cette méthode des fréquences sur le même texte codé par une substitution alphabétique plus complexe :

NOQAD DPOCZ TZAUD TJJCO
XQCOT QONCS JIOCM ODNAQ
ODMOD JMUDN AUCTX IDOIT
NCOOC ZAICO JCAJC ONAQO



1. ROUES permettant d'engendrer aléatoirement le ou les décalages d'un code (ici un décalage de 4).

PXZPA MTFMO NONPV CTNOT MTLOI BAQOQ
 ODGCO RUOXN ODOIM PXQPN OQOGC POQLT
 XFTEF TVOTU DDPTD AXPLJ ACITX NOMOIAUIOD
 INAUC AXJOJ TCMTL OIBAQ OQOZO CXTL

Même si cela est fastidieux, il est facile d'y compter les occurrences de chaque lettre (voir la figure 3). La plus fréquente est O, qui représente donc E, la lettre de loin la plus fréquente en français. La lettre suivante est T qui est probablement A, mais cela est loin d'être certain, car la fréquence du C est presque égale. Il nous manque des renseignements pour continuer le déchiffrement.

La fréquence des digrammes

L'analyse des fréquences des lettres ne suffit pas pour décrypter un texte aussi court. Il est nécessaire de tenir compte des groupes de deux lettres (les digrammes) les plus fréquents. Le E étant repéré, nous étudions donc les digrammes le contenant.

Les digrammes incluant E sont, par ordre de fréquence dans la littérature, ES, DE, LE, EN, RE, ER, TE, EL, SE, ET, ME, EM, IE, ED, NE, EC, EE, UE, CE, EU. Dans le texte codé, nous rencontrons neuf fois QO, six fois NO et OD, cinq fois CO, OI et OQ, quatre fois MO, OC et ON ; les autres occurrences sont trop faibles pour être interprétées. Cela nous incite à penser que Q est D, ce que la fréquence de Q ne contredit pas, puisqu'elle est de 5,9 pour cent dans le texte codé pour 4,18 pour cent de D dans un texte moyen.

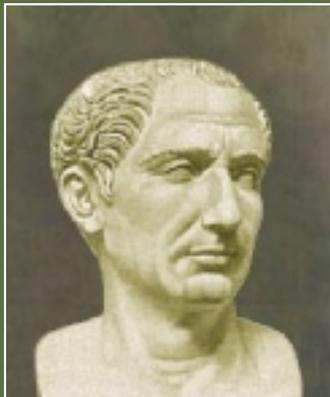
Le même type de raisonnement amène à penser que D est S, d'autant plus que le texte contient deux occurrences de « DD ». De même, « C » est probablement « R ». En faisant l'hypothèse probable que « T » est « A », nous obtenons en couleur la partie du message décrypté :

NEDAS SPERZ AZAUS AJJRE XDREA DENRS JIERM
 ESNAD ESMES JMUSN AURAX ISEIA NCEER ZAIRE
 JRAJRENAD EPXZPA MAFME NENPV RANEA MALEI
 BADED ESGRE RUEXN ESEIM PXDPN EDEGR
 PEDLA XFTEF AVEAU SSPAS AXPLJ ARIAX NEMEI
 AUIES INAUR AXXEJ ARMAL EIBAD EDEZE RXAL

Aucun mot n'apparaît de façon évidente dans ce début de décryptage. Cependant, les deux mots du début : NEDASSPERZ laissent penser que « A » représente une voyelle, donc « I », « O » ou « U ». Nous pouvons transformer le message sous ces trois hypothèses. Seule celle où il représente « O » est vraisemblable. Arrivé à ce point, les déductions font boule de neige. La première étant que « P » ne peut être que « I ». Très vite, nous trouvons le message d'origine : « Ce dossier va vous apprendre à décrypter les codes les plus courants et à créer votre propre code inviolable ! Ceci grâce à la méthode des fréquences et l'indice de Friedman. Babbage aussi a son importance. Le tout est couronné par la méthode de Vernam. »

Le code de Vigenère

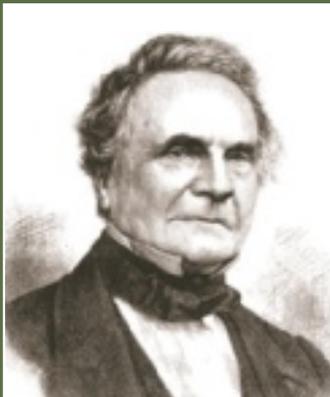
Pour tourner cette vulnérabilité des codages par substitution alphabétique, un diplomate de la Renaissance, Blaise de Vigenère, eut l'idée de faire varier le décalage de César suivant une clef, tenue secrète bien sûr. Cette clef se



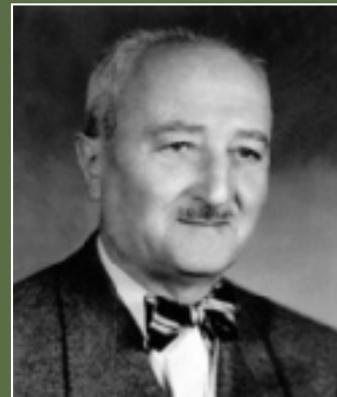
Jules César



Blaise de Vigenère



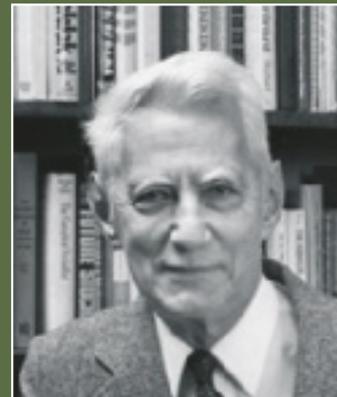
Charles Babbage



William Friedman



Gilbert Vernam



Claude Shannon

JULES CÉSAR (100-44 av. J.-C.) grand utilisateur des codes par substitution alphabétique simple : les lettres du texte initial, le clair, sont toutes décalées de la même valeur. **BLAISE DE VIGENÈRE** (1523-1596) est l'inventeur du code polyalphabétique à mot clef, où chaque lettre du texte clair est décalé d'une valeur dépendant des lettres d'un mot clef. **CHARLES BABBAGE** (1791 - 1871) a inventé une méthode pour décrypter efficacement le système de Vigenère. **WILLIAM FRIEDMAN** (1891-1969) a inventé une nouvelle technique : l'indice de coïncidence mesurant le hasard introduit par la méthode de Vigenère. Il permet souvent de trouver le nombre de lettres du mot clef. **GILBERT VERNAM** (1890-1960) inventa un code inviolable : comme l'ont prouvé les efforts pour décoder la procédure de Vigenère, la réussite dépend fortement de la longueur de la clef. G. Vernam utilise une seule fois une clef de la même longueur que le message. **CLAUDE SHANNON** (1916-2001) a démontré que ce code n'est pas déchiffirable.

trouve être un simple mot ou un texte, CARTE par exemple. Pour l'utiliser, il suffit de la placer sous le message à coder, en la répétant autant de fois que nécessaire. On décale alors chaque lettre du message suivant celle de la clef située juste en dessous, de deux pour C, de zéro pour A, et ainsi de suite. En utilisant la clef ci-dessus, le texte « voici la méthode de Vigenère » devient : XOZVM NADXX JOUXH GVZZI PEIX. La grande force du chiffre de Vigenère est que la même lettre sera chiffrée de différentes manières. Par exemple, le E du texte clair ci-dessus a été chiffré successivement X X G I E X, ce qui rend inutilisable l'analyse des fréquences classique.

Considérons le texte suivant, codé par Vigenère :

EPHTK UTIWN CGSZK CATWW POVJS FPGWQ
REIWD GDGTV GDPJK RWYXU QFVFF VDIYS ECIJJ
XZXWW RCSUJ GNSIW KYZNG NLFQW EPGNY
TLGJS NLQJL JZHJV GDJWW SFISU GDIYD KYHNU
GOIKJ KPHRS PMEGT CRIFM UDMFK QYMRH
QCXFF EPPJL QFXJK VNSZJ QYRJH CCPFE GELTV
GOIAW TYER

Si la clef est de longueur 5, le sous message composé des premières lettres des groupes ci-dessus a été codé par simple décalage (la valeur de ce décalage est celui de la première

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
8,40	1,06	3,03	4,18	17,26	1,12	1,27	0,92	7,34	0,31	0,05	6,01	2,96
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
7,13	5,26	3,01	0,99	6,55	8,08	7,07	5,74	1,32	0,04	0,45	0,30	0,12

2. TABLEAU DES FRÉQUENCES des lettres françaises (pourcentages) : la plus fréquente est E, puis viennent A, S, I, N, T, R, L, O, U et D.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
7,4	1,0	8,4	6,9	0,0	2,0	1,0	0,0	5,4	3,9	0,0	2,5	4,4
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
6,4	18,2	4,4	5,9	0,5	0,5	8,9	3,4	1,0	0,0	5,9	0,0	2,0

3. FRÉQUENCES DES LETTRES dans le texte codé (en pourcentages).

clair	V	O	I	C	I	L	A	M	E	T	H	O	D	E	D	E	V	I	G	E	N	E	R	E
clef	C	A	R	T	E	C	A	R	T	E	C	A	R	T	E	C	A	R	T	E	C	A	R	T
décalage	2	0	18	20	5	2	0	18	20	5	2	0	18	20	5	2	0	18	20	5	2	0	18	20
chiffré	X	O	Z	V	M	N	A	D	X	X	J	O	X	H	G	V	Z	Z	I	P	E	I	X	

4. CODE DE VIGENÈRE : on place la clef sous le message à coder en la répétant autant de fois que nécessaire. On décale alors chaque lettre du message suivant la lettre située en dessous, de deux pour « C », de zéro pour « A », et ainsi de suite.

lettre de la clef). La lettre la plus fréquente y est « G ». Ainsi « E » a été changé en « G ». La première lettre de la clef est « C ». Nous recommençons avec les deuxième, troisième, quatrième et cinquième lettre de chaque groupe. Nous pouvons conclure dans tous les cas, sauf le second, où « D » et « P » sont quasiment ex aequo. Autrement dit, la seconde lettre de la clef est « Z » ou « L ». Finalement, nous trouvons deux clefs possibles : « CLEFS » et « CZEFS ». En essayant toutes les deux, nous constatons que seule la première donne un message compréhensible.

Ainsi, le code de Vigenère est cassable au moyen de la méthode des fréquences quand on connaît la longueur de la clef et que l'on dispose d'un message assez long. Plus exactement, le rapport entre la longueur du message et la longueur de la clef doit avoir une taille minimale, 30 ou 40 environ.

L'indice de Friedman

Aussi curieux que cela paraisse, il existe un moyen de déterminer la longueur de la clef, condition nécessaire au déchiffrement du code de Vigenère.

En 1920, William Friedman, cryptologue dans l'armée américaine, a proposé un indice fondé sur une idée fondamentale en mathématiques, celle d'invariant : un invariant d'une transformation est une quantité dont la valeur ne change pas quand on applique cette transformation. Quand nous permutons les lettres d'un message, la somme de leurs fréquences est toujours égale à 1. C'est un invariant par substitution alphabétique, mais celui-ci est sans intérêt. Si nous faisons la somme des carrés des fréquences, nous obtenons un autre invariant que, par similitude et extension, nous appellerons indice de Friedman. Le tableau des fréquences des lettres en français permet de le calculer pour un texte français moyen. Il s'agit de 0,078. Si les lettres sont aléatoires, leur fréquence est de 1/26 chacune. L'indice de Friedman d'un tel texte aléatoire est égal à 26 fois $(1/26)^2$, soit 1/26 c'est-à-dire 0,038. Le mélange des lettres résultant des substitutions à la Vigenère diminue l'indice de Friedman.

Voyons comment utiliser une telle information sur le texte suivant, codé par la méthode de Vigenère :

CVWOJ LIVKV ROOLL AGRV GDIXA UXCIR PKXRC
XSTHD VLLVL PCNST HUITN KLEKT CIXEI
OOKKE GKOGK ETHDV BNMBO CTBCX CVVIX
KATXA CTMVM HFWEU XSWKE HNEEV EJXTC
BNUBC VWEWK IVWVR GBRUB RZERN SJBAJ
HNZFP FKTRG CVEEK HUKXS KVOLK OEGEG
TRCTM VMHFW EUXVV KNRF

Un calcul fastidieux à la main, mais facile à l'aide d'un ordinateur, montre que son indice de Friedman vaut 0,052. Ce nombre est trop éloigné de 0,078 pour que le texte puisse avoir été codé par substitution alphabétique et gardé un indice égal à celui d'un texte français non mélangé : autrement dit, la clef n'est pas de longueur 1.

Si la clef était de longueur 2, en ne gardant qu'une lettre sur deux pour calculer l'indice de Friedman, on retrouverait l'indice du français. En le calculant sur l'exemple ci-dessus, l'indice vaut alors 0,053, toujours trop faible.

Avec une lettre sur trois, nous obtenons 0,087. La clef est donc vraisemblablement de longueur 3. Nous

COMMENT CASSER UN CODE

L'INDICE DE FRIEDMAN

Tirons deux lettres au hasard dans un texte de longueur N : quelle est la probabilité qu'elles soient identiques ? Si le nombre de A est égal à N_A , le nombre de couples de deux A est égal à $N_A(N_A - 1)/2$, celui de B , $N_B(N_B - 1)/2$, etc. En faisant la somme de tous ces nombres, on trouve le nombre de couples formés de deux lettres identiques. Le nombre de couples quelconques dans le texte est égal à $N(N - 1)/2$, donc la probabilité pour que deux lettres d'un texte coïncident vaut la somme des termes $N_A(N_A - 1)/2 + N_B(N_B - 1)/2 + \dots$ divisée par $N(N - 1)$. Ce nombre est appelé l'indice de coïncidence de Friedman. Il est très proche de l'indice de Friedman que nous évoquons dans le texte.

LA MÉTHODE DE BABBAGE

Le mathématicien anglais et précurseur de l'informatique, Charles Babbage, eut l'idée de chercher des répétitions dans les messages cryptés pour en déduire des informations sur la longueur de la clef. Dans le texte en exemple, nous trouvons, dans le neuvième groupe

de cinq lettres, la suite VLLVL. Il peut s'agir d'une coïncidence mais, plus probablement, le même texte a été crypté avec la même partie de la clef. Comme ces deux répétitions de VL sont distantes de trois lettres, cela signifierait que la longueur de la clef divise trois, donc est égale à trois.



LES ROUAGES D'ENIGMA

La machine *Enigma*, utilisée par les armées allemandes lors de la Seconde Guerre mondiale, permet un chiffrement automatisé de substitution polyalphabétique, comme le code de Vigenère. La clef n'y est pas un texte tenu secret, mais la position de plusieurs de ses éléments, appelés « rotors », changés chaque jour. Plus la machine en comporte, plus elle est difficile à décrypter.

L'armée en utilisait plusieurs types, comportant trois, quatre ou cinq rotors, ces derniers étant réservés à la marine de guerre. Bien que connue, la méthode des coïncidences de Friedman n'était pas applicable à l'époque, faute de moyens de calcul adaptés.

Alan Turing utilisa d'autres méthodes, dont une due à une incroyable erreur de procédure de l'armée allemande. Le choix quotidien des trois premiers rotors des machines à cinq rotors était le même que celui des machines à trois rotors, que les Anglais savaient décrypter. Ils n'ignoraient donc que les deux derniers.

pouvons ensuite appliquer la méthode des fréquences, comme précédemment, pour en déduire la clef utilisée, puis le message. Il est possible de trouver cette longueur par une méthode moins systématique mais aussi moins calculatoire, inventée au XIX^e siècle par Charles Babbage (voir l'encadré ci-dessus).

L'idée de Vernam

Nous déduisons de ces deux méthodes que, plus le message est long par rapport à la clef, plus il est facile à décoder. Pour créer un code inviolable, l'ingénieur de la Société de téléphonie AT & T, Gilbert Vernam (1890-1960), eut l'idée, en 1917, d'utiliser une clef aussi longue que le message et de la jeter après usage. L'utiliser deux fois reviendrait à utiliser une clef deux fois plus petite que les deux premiers messages mis bout à bout, trois fois, trois fois plus petite, et ainsi de suite. En modélisant la notion d'information, en 1949, Claude Shannon a montré que le chiffre de Vernam est inviolable. Sans entrer dans les détails, il est facile de comprendre que, si la clef est aléatoire, en l'appliquant, le message obtenu est également aléatoire.

Dans cette lutte entre l'épée et le bouclier, la faiblesse de ce système reste la transmission de la clef. Pour les transmissions diplomatiques ou rares, un DVD circulant par la valise diplomatique ou autre moyen sécurisé suffit. Pour des usages plus réguliers, comme la routine bancaire (carte bleue, etc.), une voie de recherche est d'utiliser l'incerti-

tude des quantas pour transmettre la clef (si les informations sont interceptées, cette interception est connue). Cette méthode prometteuse est appelée « cryptographie quantique ». Malheureusement, elle ne fonctionne pour l'instant que sur de courtes distances.

En passant de Jules César à Claude Shannon, nous avons atteint l'ère numérique. Tout message est aujourd'hui une suite de 0 et de 1. Il s'agit d'un mot sur un alphabet très simple, celui qui n'a que deux lettres : 0 et 1. Le décalage de César correspond à l'addition bit à bit : $1 + 0 = 1$, $0 + 1 = 1$, $0 + 0 = 0$ et $1 + 1 = 0$. Pour décoder, on ajoute la clef au message codé pour obtenir le message en clair ! Pour correspondre de cette manière, il suffit donc d'échanger au préalable un DVD quelconque : il s'agit toujours d'une suite de 0 et de 1 ! Codage et décodage sont quasiment instantanés.

Utilisés par tous les enfants pour communiquer discrètement avec des complices « dans le secret », les codes à substitution ont été formidablement perfectionnés par une lutte continue entre les codeurs et les déchiffreurs.

Hervé LEHNING est professeur de mathématiques et rédacteur en chef de la revue *Tangente*.

Hervé LEHNING, *Cryptographie & codes secrets, l'art de cacher*, Bibliothèque Tangente (HS 26), POLE, 2006

L'art du secret, in *Pour la science*, dossier hors-série, juillet-octobre 2002.

Pierre BERLOQUIN, *Codes et casse-tête*, Pocket, 2006

Énigmes

sur les carrés magiques

Christian BOYER

Alors que les carrés magiques sont connus et étudiés depuis des siècles, quelques problèmes, d'énoncés pourtant simples, résistent ! Quel lecteur saura résoudre une (ou plusieurs) de ces cinq énigmes ?

Les carrés magiques sont des tableaux d'un nombre carré de cases remplies de nombres entiers tous différents : les sommes des cases de ce carré, selon les lignes, les colonnes et les diagonales de ce carré, sont égales. Les mathématiciens se sont parfois imposé des contraintes supplémentaires.

Nous présentons ici cinq énigmes avec des prix à gagner : l'auteur offre 100 euros et une bouteille de champagne pour chaque énigme.

1) Carré magique de carrés

Un carré magique 3×3 peut-il être construit avec neuf entiers carrés distincts ? Martin Gardner publie cette question en 1996 dans la revue *Quantum*, puis à nouveau en 1998 dans *Scientific American* : il offre 100 \$ à la première personne qui construira un tel carré de carrés ou qui prouvera que le problème est impossible. À ce jour, personne n'a réussi à gagner ces 100 \$.

Martin Gardner attribue cet intéressant problème à Martin LaBar qui l'avait posé dans *The College Mathematics Journal* en 1984. Or le problème est bien plus ancien : les carrés de carrés avaient déjà été étudiés par Leonhard Euler, puis par Édouard Lucas (voir, en bibliographie, l'article dans *The Mathematical Intelligencer* 2005).

En 1770, Euler écrit en français à Lagrange : « Permettez-moi, Monsieur, que je vous parle encore d'un problème qui me parait fort curieux et digne de toute attention. » Euler est ravi de lui annoncer la construction d'un carré magique 4×4 composé de seize entiers carrés distincts (voir, à côté du titre, le dessin du carré magique par Euler, où les éléments doivent être élevés au

carré). La lettre est datée du 9-20 mars 1770 : pourquoi cette étrange double date donnée par Euler ? Parce que le calendrier russe avait alors 11 jours d'écart avec la plupart des autres pays européens. Lorsque Euler rédigeait cette lettre, il était le 9 mars 1770 à St-Petersbourg, lieu de sa résidence, alors qu'il était simultanément le 20 mars à Paris, comme à Berlin, où résidait alors Lagrange, son correspondant. La Russie n'est passée du calendrier julien au grégorien que très tard, en 1918 ; c'est pourquoi la révolution d'Octobre de 1917 y est fêtée en novembre...

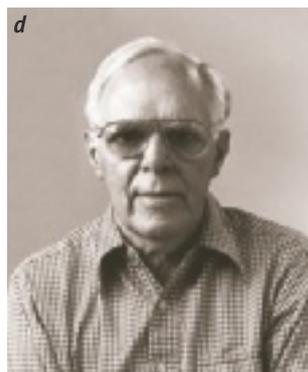
Euler ne divulguera pas sa méthode à Lagrange et ne la publiera que plus tard dans un mémoire présenté à l'Académie de St-Petersbourg.

Le premier à énoncer le problème 3×3 dans les mêmes termes que LaBar et Martin Gardner est probablement Édouard Lucas en 1876, dans la revue *Nouvelle Correspondance Mathématique* éditée par le mathématicien belge Eugène Catalan. Lucas y donne une méthode de construction de carrés semi-magiques 3×3 (voir la figure 4a), tout en prouvant qu'elle ne permet hélas pas d'obtenir les deux diagonales magiques. Mais, comme il l'écrit : « Cela ne prouve pas, il est vrai, que le problème soit insoluble. »

Qu'appelle-t-on ici carré magique et semi-magique ? Dans la définition classique, un carré magique $n \times n$ (ou d'ordre n) doit impérativement utiliser les entiers consécutifs de 1 à n^2 . Dans cet article, un carré magique n'est pas limité

1. QUELQUES ACTEURS DE L'ÉNIGME 1 : (a) Leonhard Euler (1707-1783), (b) Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), (c) Édouard Lucas (1842-1891), (d) Martin Gardner (né en 1914).

+68	-29	+41	-37
-17	+31	+79	+32
+59	+28	-23	+61
-11	-77	+8	+49



aux entiers consécutifs : il peut inclure des entiers quelconques, consécutifs ou non. La seule condition est que les entiers utilisés soient tous distincts. Le reste de la définition est inchangé : les n lignes, n colonnes et deux diagonales doivent donner la même somme. Dans un carré semi-magique, les n lignes et les n colonnes donnent la même somme, mais les diagonales peuvent donner n'importe quelle somme.

Après la question posée par Martin Gardner, de nombreuses recherches ont donné beaucoup d'articles. John Robertson a prouvé que le problème du carré magique 3×3 de carrés est équivalent à d'autres problèmes mathématiques sur les progressions arithmétiques, sur les triangles rectangles de même aire et sur les nombres congruents et courbes elliptiques $y^2 = x^3 - n^2x$. Grâce aux recherches numériques faites par Duncan Buell, on sait qu'il n'y a aucune solution ayant une cellule centrale inférieure à $2,5 \times 10^{25}$: si le problème a une solution, alors les nombres sont énormes.

Il y a deux façons différentes d'essayer d'approcher au plus près d'une solution :

a) En imposant neuf entiers carrés, obtenir le carré le plus magique possible, c'est-à-dire avec le maximum d'alignements magiques sur les huit demandés (3 lignes + 3 colonnes + 2 diagonales). Lucas en avait obtenu six, mais sa méthode permet d'en obtenir sept (voir les figures 4a et 4b).

b) Ou bien en imposant les huit alignements magiques (donc en imposant que le carré soit magique), avoir le maximum d'entiers carrés sur les neuf demandés. Le meilleur résultat actuellement connu est un carré magique 3×3 comportant sept entiers carrés (voir la figure 4c).

Les 100 \$ de Martin Gardner semblant très difficiles à gagner, j'ai proposé dans mon article américain de 2005 un prix de 100 euros plus une bouteille de champagne pour un sous-problème *a priori* plus simple : Trouver un nouveau carré magique 3×3 comportant sept (et pourquoi pas huit ?) entiers carrés, différent du seul exemple connu 4c (et de ses rotations, symétries et multiples k^2). Avant de soumettre ce défi, j'avais essayé de trouver un autre exemple, mais sans succès, pour certains types de carrés dont les centres allaient jusqu'à 10^{30} . Pour l'instant, aucun lecteur du *Mathematical Intelligencer* n'a réussi. Mais vous peut-être ?

2) Plus petit carré bimagique

Un carré bimagique est un carré magique qui reste encore magique après que les nombres de ses cases ont été élevés au carré. Ou, si vous préférez, c'est un carré de carrés qui reste magique lorsque ses nombres ne sont plus élevés au carré. Les premiers carrés bimagiques connus sont des carrés 8×8 et 9×9 construits par le Français G. Pfeffermann en 1890 et 1891. Des jeux ancêtres du sudoku utilisent des carrés bimagiques dans la presse française de la fin du XIX^e (voir mes articles dans *Pour La Science* d'août 2001 et juin 2006). On sait aujourd'hui qu'il est impossible de construire des carrés bimagiques plus petits que 8×8 en utilisant des entiers consécutifs. En revanche, si l'on n'impose pas que les entiers soient consécutifs, quel est le plus petit carré bimagique possible ?

Peu avant sa mort accidentelle, Édouard Lucas écrit un article félicitant Pfeffermann pour ses carrés bimagiques. Dans ce même article, Lucas prouve qu'un carré magique

Ordre	Carrés magiques de carrés	Carrés bimagiques avec des entiers distincts	Carrés bimagiques avec des entiers consécutifs
3x3	Énigme 1	Impossible E. Lucas (1891)	
4x4	L. Euler (1770)	Impossible L. Pebody et J.-C Rosa (2004)	Impossible E. Lucas (1891)
5x5	Ch. Boyer (2004)	Énigme 2	
6x6	Ch. Boyer (2005)	J. Wroblewski (2006)	Impossible Ch. Boyer-W. Trump (2002)
7x7	Ch. Boyer (2005)	L. Morgenstern (2006)	
8x8 et +	G. Pfefferman (8x8 en 1890, 9x9 en 1891) premiers carrés bimagiques utilisant des entiers consécutifs. De nombreux autres sont connus (10x10, 11x11, 12x12...)		

2. DÉCOUVREURS ET ÉNIGMES de carrés magiques de carrés.

a	b	c																																																		
<table border="1"> <tr><td>a²</td><td>b²</td><td>c²</td></tr> <tr><td>d²</td><td>e²</td><td>f²</td></tr> <tr><td>g²</td><td>h²</td><td>i²</td></tr> </table>	a ²	b ²	c ²	d ²	e ²	f ²	g ²	h ²	i ²	<table border="1"> <tr><td>68²</td><td>29²</td><td>41²</td><td>37²</td></tr> <tr><td>17²</td><td>31²</td><td>79²</td><td>32²</td></tr> <tr><td>59²</td><td>28²</td><td>23²</td><td>61²</td></tr> <tr><td>11²</td><td>77²</td><td>8²</td><td>49²</td></tr> </table>	68 ²	29 ²	41 ²	37 ²	17 ²	31 ²	79 ²	32 ²	59 ²	28 ²	23 ²	61 ²	11 ²	77 ²	8 ²	49 ²	<table border="1"> <tr><td>1²</td><td>2²</td><td>31²</td><td>3²</td><td>20²</td></tr> <tr><td>22²</td><td>16²</td><td>13²</td><td>5²</td><td>21²</td></tr> <tr><td>11²</td><td>23²</td><td>10²</td><td>24²</td><td>7²</td></tr> <tr><td>12²</td><td>15²</td><td>9²</td><td>27²</td><td>14²</td></tr> <tr><td>25²</td><td>19²</td><td>8²</td><td>6²</td><td>17²</td></tr> </table>	1 ²	2 ²	31 ²	3 ²	20 ²	22 ²	16 ²	13 ²	5 ²	21 ²	11 ²	23 ²	10 ²	24 ²	7 ²	12 ²	15 ²	9 ²	27 ²	14 ²	25 ²	19 ²	8 ²	6 ²	17 ²
a ²	b ²	c ²																																																		
d ²	e ²	f ²																																																		
g ²	h ²	i ²																																																		
68 ²	29 ²	41 ²	37 ²																																																	
17 ²	31 ²	79 ²	32 ²																																																	
59 ²	28 ²	23 ²	61 ²																																																	
11 ²	77 ²	8 ²	49 ²																																																	
1 ²	2 ²	31 ²	3 ²	20 ²																																																
22 ²	16 ²	13 ²	5 ²	21 ²																																																
11 ²	23 ²	10 ²	24 ²	7 ²																																																
12 ²	15 ²	9 ²	27 ²	14 ²																																																
25 ²	19 ²	8 ²	6 ²	17 ²																																																

?
(Énigme 1)

3. CARRÉS MAGIQUES DE CARRÉS. On ne connaît aucun carré magique de carrés 3×3 (a), le premier connu 4×4 (b) dû à Euler, le premier 5×5 (c) découvert par l'auteur de cet article.

a	$(p^2 + q^2 - r^2 - s^2)^2$	$(2(qr + ps))^2$	$(2(qs - pr))^2$
	$(2(qr - ps))^2$	$(p^2 - q^2 + r^2 - s^2)^2$	$(2(rs + pq))^2$
	$(2(qs + pr))^2$	$(2(rs - pq))^2$	$(p^2 - q^2 - r^2 + s^2)^2$

$(p, q, r, s) = (1, 3, 4, 11)$

b	<table border="1"> <tr><td>127²</td><td>45²</td><td>58²</td><td>21609</td></tr> <tr><td>2²</td><td>113²</td><td>94²</td><td>21609</td></tr> <tr><td>74²</td><td>82²</td><td>97²</td><td>21609</td></tr> </table>	127 ²	45 ²	58 ²	21609	2 ²	113 ²	94 ²	21609	74 ²	82 ²	97 ²	21609	c	<table border="1"> <tr><td>373²</td><td>289²</td><td>565²</td></tr> <tr><td>360721</td><td>425²</td><td>23²</td></tr> <tr><td>205²</td><td>527²</td><td>222121</td></tr> </table>	373 ²	289 ²	565 ²	360721	425 ²	23 ²	205 ²	527 ²	222121
127 ²	45 ²	58 ²	21609																					
2 ²	113 ²	94 ²	21609																					
74 ²	82 ²	97 ²	21609																					
373 ²	289 ²	565 ²																						
360721	425 ²	23 ²																						
205 ²	527 ²	222121																						

21609 21609 21609 21609 38307

4. APPROCHES DE L'ÉNIGME 1. Première approche (a) méthode de Lucas publiée en 1876 engendrant des carrés semi-magiques 3×3 , les trois lignes et trois colonnes ayant la même somme : $(p^2 + q^2 + r^2 + s^2)^2$. Carré semi-magique (b) ayant en plus une diagonale magique, trouvé par Michael Schweitzer et indépendamment par Lee Sallows en 1996. Lucas a prouvé que sa méthode ne permet pas d'obtenir les deux diagonales magiques, mais n'a pas vu qu'elle permet, avec des p, q, r, s bien choisis comme ici, d'obtenir une diagonale magique. M. Schweitzer et L. Sallows n'ont pas vu que cette ancienne méthode permettait d'engendrer leur carré. Seconde approche de l'énigme 1 : carré magique 3×3 (c) avec sept entiers carrés sur neuf, trouvé par Andrew Bremner et indépendamment par L. Sallows en 1997.

<table border="1"> <tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr> <tr><td>d</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>e</td><td></td><td></td></tr> </table> S_1	a	b	c	d			e			Élévation au carré →	<table border="1"> <tr><td>a²</td><td>b²</td><td>c²</td></tr> <tr><td>d²</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>e²</td><td></td><td></td></tr> </table> S_2	a ²	b ²	c ²	d ²			e ²		
a	b	c																		
d																				
e																				
a ²	b ²	c ²																		
d ²																				
e ²																				

5. IMPOSSIBILITÉ D'UN CARRÉ SEMI-BIMAGIQUE 3×3 . Si un carré semi-bimagique 3×3 existait, alors : $S_1 = a + b + c = a + d + e$, $e = b + c - d$, et $S_2 = a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + d^2 + e^2$, $b^2 + c^2 = d^2 + e^2$, $b^2 + c^2 = d^2 + (b + c - d)^2$, $0 = 2d^2 + 2bc - 2bd - 2cd$, $(d - b)(d - c) = 0$, donc $d = b$ ou $d = c$: impossible car tous les entiers doivent être différents !

1	35	46	61	143
37	71	13	22	143
43	26	67	7	143
62	11	17	53	143
143	143	143	143	

Élévation
au carré →

1 ²	35 ²	46 ²	61 ²	7063
37 ²	71 ²	13 ²	22 ²	7063
43 ²	26 ²	67 ²	7 ²	7063
62 ²	11 ²	17 ²	53 ²	7063
7063	7063	7063	7063	

6. CARRÉ SEMI-BIMAGIQUE 4 × 4. Mais un carré bimagique 4 × 4 est impossible.

120 3296					
3 ²	37 ²	20 ²	44 ²	16 ²	120 3970
34 ²	35 ²	1 ²	12 ²	38 ²	120 3970
41 ²	8 ²	24 ²	40 ²	7 ²	120 3970
10 ²	36 ²	47 ²	13 ²	14 ²	120 3970
32 ²	4 ²	28 ²	11 ²	45 ²	120 3970
120	120	120	120	120	120
3970	3970	3970	3970	3970	4004

17 ²	36 ²	55 ²	124 ²	62 ²	114 ²
58 ²	40 ²	129 ²	50 ²	111 ²	20 ²
108 ²	135 ²	34 ²	44 ²	38 ²	49 ²
87 ²	98 ²	92 ²	102 ²	1 ²	28 ²
116 ²	25 ²	86 ²	7 ²	96 ²	78 ²
22 ²	74 ²	12 ²	81 ²	100 ²	119 ²

7. CARRÉ MAGIQUE 5 × 5 PRESQUE BIMAGIQUE (a), $S_1 = 120$, $S_2 = 3970$. Il échoue pour ses deux diagonales. Premier carré bimagique connu 6 × 6, de Jaroslaw Wroblewski (b). $S_1 = 408$, $S_2 = 36926$.

Ordre	Carrés semi-magiques de cubes	Carrés magiques de cubes
3x3	Énigme 3	Impossible
4x4	L. Morgenstern (2006)	Énigme 4
5x5 à 8x8	L. Morgenstern/Ch. Boyer (2006)	?
9x9 à 11x11	Ch. Boyer (2006)	
12x12	W. Trump (2002)	

8. DÉCOUVREURS ET ÉNIGMES de carrés magiques de cubes.

51 ³	619 ³	165 ³
618 ³	162 ³	115 ³
178 ³	72 ³	235788435

9. CARRÉ SEMI-MAGIQUE 3 × 3 avec huit cubes sur neuf.

$$(a, b, c, d) = (1, 12, 9, 10)$$

$$(e, f, g, h) = (2, 16, 9, 15)$$

(af) ³	(de) ³	(ce) ³	(bf) ³	16 ³	20 ³	18 ³	192 ³
(bh) ³	(cg) ³	(dg) ³	(ah) ³	180 ³	81 ³	90 ³	15 ³
(bg) ³	(ch) ³	(dh) ³	(ag) ³	108 ³	135 ³	150 ³	9 ³
(ae) ³	(df) ³	(cf) ³	(be) ³	2 ³	160 ³	144 ³	24 ³

10. MÉTHODE DE LEE MORGENSTERN produisant des carrés semi-magiques 4 × 4 de cubes si $a^3 + b^3 = c^3 + d^3 = u$, $e^3 + f^3 = g^3 + h^3 = v$. Sa somme magique est uv . En utilisant le fameux *Taxicab(2)=1729*, ainsi que le second exemple 4104 trouvé par Frenicle (voir *Les nombres Taxicabs* dans ce dossier), on obtient le carré semi-magique de droite : sa somme magique est $1729 \times 4104 = 7095816$. Cette méthode pourrait faire encore mieux et générer des carrés complètement magiques si cette autre équation était simultanément respectée : $(ae)^3 + (bf)^3 = (cg)^3 + (dh)^3$. Résoudre ce système de trois équations permettrait donc de résoudre l'énigme !

19 ³	(-3) ³	(-10) ³	(-18) ³
(-42) ³	21 ³	28 ³	35 ³
42 ³	(-21) ³	(-28) ³	(-35) ³
(-19) ³	3 ³	10 ³	18 ³

11. SI L'ON ACCEPTE LES CUBES NÉGATIFS, on construit assez facilement des carrés 4 × 4 de cubes. La somme magique est ici nulle : regardez l'astuce de symétrie haut/bas. Les entiers utilisés sont bien tous « distincts », puisque x est différent de $-x$.

3 × 3 d'entiers distincts ne peut pas être bimagique. Sa démonstration est reproduite dans le volume IV de ses célèbres *Récréations Mathématiques*. John Hendricks a publié en 1998 dans le *Journal of Recreational Mathematics* une preuve différente. La figure 5 donne une troisième preuve qui, tout en étant très simple, va au-delà : même un carré 3 × 3 semi-bimagique est impossible.

Les semi-bimagiques 4 × 4 sont possibles (figure 6), mais pas les bimagiques 4 × 4 : la preuve de l'Anglais L. Pebody, similaire à celle du Français J.-C. Rosa, est indiquée dans www.multimagie.com. Comme des bimagiques 6 × 6 et 7 × 7 sont connus depuis 2006 (figures 2 et 7b), la question du plus petit carré bimagique se résume maintenant à notre énigme 2 : *Un carré bimagique 5 × 5 peut-il être construit avec des entiers distincts ?*

3) Carré semi-magique de cubes

Dans l'énigme 1, on utilise des nombres carrés. Mais est-il possible de construire un carré magique 3 × 3 utilisant neuf nombres qui sont des cubes ? Là on connaît la réponse : c'est impossible ! En effet, si z^3 est le nombre de la cellule centrale, alors tout alignement passant par le centre doit respecter $x^3 + y^3 = 2z^3$ (venant de $x^3 + z^3 + y^3 = 3z^3$, la somme magique de tout carré magique 3 × 3 étant égale à trois fois son centre). Or Euler et Legendre ont démontré que $x^3 + y^3 = kz^3$ est impossible avec des entiers distincts, pour $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Signalons au passage que cette équation est tout de même possible pour d'autres k : par exemple, Lucas a trouvé $17^3 + 37^3 = 6 \times 21^3$, et Fermat $4^3 + 5^3 = 7 \times 3^3$.

Un carré magique 3 × 3 de cubes est donc impossible. Mais un carré semi-magique 3 × 3 est-il possible ? Telle est notre énigme 3. Frank Rubin a calculé en 2006 qu'il n'y a aucune solution utilisant des nombres tous inférieurs à $300\,000^3$. Les meilleurs résultats connus utilisent huit cubes sur neuf, comme mon exemple de la figure 9.

4) Carré magique de cubes

Le plus petit carré magique de cubes ne pouvant pas être 3 × 3, un carré magique 4 × 4 de cubes positifs distincts peut-il être construit ? Aujourd'hui encore, on l'ignore : c'est l'énigme 4.

Le résultat 4 × 4 le plus intéressant est dû à Lee Morgenstern. Ce mathématicien américain à la retraite a récemment trouvé une belle méthode basée sur les nombres *Taxicabs* qui permet d'engendrer des carrés semi-magiques 4 × 4 de cubes. Il propose même un système de trois équations qui pourrait résoudre le problème (voir la figure 10). Toutefois, si mes calculs sont bons, il n'y a aucune solution à ce système avec a, b, c, d, e, f, g , et h tous inférieurs à 500 000.

On ne connaît pas non plus de carré 5 × 5, 6 × 6, 7 × 7 ou 8 × 8 de cubes. Le plus petit carré de cubes actuellement connu est mon exemple 9 × 9 construit en 2006 et reproduit figure 12. De plus gros carrés de cubes étaient précédemment connus, grâce aux carrés trimagiques. C'est en 1905 que Gaston Tarry construit le premier carré trimagique connu : son carré 128 × 128 reste magique lorsque les nombres sont élevés au carré, et reste magique lorsque ses nombres sont élevés au cube. On peut donc dire que le premier carré de cubes connu est dû à Gaston Tarry. De plus petits carrés trimagiques sont ensuite

53 ³	2 ³	68 ³	72 ³	19 ³	62 ³	28 ³	49 ³	16 ³
9 ³	70 ³	40 ³	12 ³	24 ³	30 ³	78 ³	50 ³	56 ³
27 ³	36 ³	8 ³	69 ³	34 ³	58 ³	39 ³	17 ³	81 ³
1 ³	11 ³	23 ³	47 ³	71 ³	76 ³	45 ³	43 ³	52 ³
75 ³	63 ³	33 ³	25 ³	42 ³	22 ³	21 ³	74 ³	14 ³
65 ³	73 ³	7 ³	41 ³	6 ³	66 ³	54 ³	31 ³	26 ³
51 ³	13 ³	35 ³	4 ³	55 ³	15 ³	60 ³	77 ³	59 ³
3 ³	57 ³	64 ³	32 ³	80 ³	29 ³	48 ³	10 ³	46 ³
61 ³	20 ³	79 ³	67 ³	38 ³	5 ³	44 ³	18 ³	37 ³

12. PLUS PETIT CARRÉ CONNU DE CUBES. Ce 9 × 9 utilise les cubes de 1³ à 81³. Aucun 8 × 8 ou plus petit n'a été découvert.

Additif	12	Puissance	Multiplicatif	4096
3 8 1	12	2 ³ 2 ⁸ 2 ¹	8 256 2	4096
2 4 6	12	2 ² 2 ⁴ 2 ⁶	4 16 64	4096
7 0 5	12	2 ⁷ 2 ⁰ 2 ⁵	128 1 32	4096
12 12 12 12			4096 4096 4096 4096	

13. CARRÉ ADDITIF transformé en carré multiplicatif. Avec son gros nombre maxi 256, le carré obtenu n'est pas le meilleur 3 × 3 possible.

2	9	12
36	6	1
3	4	18

1	15	24	14
12	28	3	5
21	6	10	4
20	2	7	18

12	35	1	40	18
36	2	24	7	25
14	45	15	4	8
5	16	42	30	3
10	6	20	9	28

14. MEILLEURS CARRÉS MULTIPLICATIFS 3 × 3 (G. Pfeffermann, 1893), 4 × 4 (H. Sayles, 1913) et 5 × 5 (Ch. Boyer, 2005). Le meilleur carré possible, tous ordres confondus, est ce 4 × 4 : nombre maximum 28.

a

52	168	15	132
36	55	273	32
234	12	96	65
40	156	44	63

b

1	90	300
60	25	18
450	12	5

15. MEILLEUR CUBE MULTIPLICATIF connu tous ordres confondus ((a) 4 × 4 × 4 plus grand nombre égal à 364). Tous les autres cubes utilisent de plus grands nombres : les meilleurs 3 × 3 × 3 ((b) H. Sayles, 1913) utilisent 900, et le meilleur 5 × 5 × 5 connu (non reproduit ici) utilise 1026. Un cube n × n × n est magique multiplicatif si ses n² lignes, n² colonnes, n² piles et quatre grandes diagonales donnent le même produit. Ce n'est donc pas demandé, mais ce cube 4 × 4 × 4 a aussi plusieurs petites diagonales (parallèles aux faces) qui sont multiplicativement magiques.

construits : 64 × 64 par le général français Eutrope Cazalas (1933), 32 × 32 par l'Américain William Benson (1976), 12 × 12 par l'Allemand Walter Trump (2002). Il est prouvé qu'il est impossible de construire avec des entiers consécutifs un carré trimagique plus petit que celui de W. Trump.

Notons que cette énigme 4 peut être élargie aux autres puissances. Noam Elkies a remarqué que grâce à la démonstration d'Andrew Wiles du dernier théorème de Fermat, il peut être montré que $x^n + y^n = 2z^n$ n'a pas de solution pour n plus grand que 2, et donc qu'il ne peut y avoir de carré magique 3 × 3 construit avec des nombres qui sont des puissances supérieures à 2. Mais les 4 × 4 ? Euler a construit son carré magique 4 × 4 avec des nombres carrés dès 1770, mais depuis personne n'a construit un carré magique 4 × 4 avec des puissances supérieures à 2. Serait-ce impossible ?

5) Cube magique multiplicatif

Un carré magique classique est « additif », car il doit avoir tous ses alignements (lignes, colonnes, diagonales) donnant la même somme. Il existe un autre type de carré magique dit « multiplicatif » : au lieu d'ajouter les nombres, on les multiplie, tous les alignements devant alors avoir le même produit. Il est aisé de montrer qu'un carré magique multiplicatif ne peut pas utiliser d'entiers consécutifs. Notons que tout carré additif peut facilement être transformé en carré multiplicatif : il suffit par exemple de transformer chaque nombre n des cellules en 2^n (voir la figure 13). Mais les carrés multiplicatifs ainsi obtenus sont quelque peu stupides et utilisent de trop grands nombres. Le sport des carrés multiplicatifs est de les construire avec les plus petits nombres possibles.

D'où la question : quel est le meilleur carré magique multiplicatif possible, c'est-à-dire ayant son plus grand nombre qui soit le plus petit possible ? La réponse est connue : c'est un carré 4 × 4 construit en 1913 par Harry Sayles ; son plus grand nombre est 28. Aucun autre carré multiplicatif, quelle que soit sa taille (3 × 3, 4 × 4, 5 × 5, ...), ne peut être construit avec d'aussi petits nombres (voir la figure 14).

Si l'on élargit à la troisième dimension, on connaît beaucoup de choses sur les cubes magiques additifs (voir *Pour La Science* de septembre 2003 et janvier 2004), mais on en sait moins sur les multiplicatifs. Ainsi, on ne sait pas quel est le meilleur cube magique multiplicatif ! Le meilleur actuellement connu est mon 4 × 4 × 4 dont le plus grand nombre est 364 (voir la figure 15).

Qui saura construire un cube multiplicatif avec de plus petits nombres ? Cette cinquième énigme est récompensée comme toutes les autres énigmes. Les solutions sont à envoyer à l'auteur cboyer@club-internet.fr.

Christian BOYER est amateur d'énigmes mathématiques informatissables.

C. BOYER, *Some notes on the magic square of squares problem*, in *The Mathematical Intelligencer*, printemps 2005.

C. BOYER, www.multimagie.com (les articles d'A. Bremner, D. Buell y sont téléchargeables).

A. BREMNER, *On squares of squares*, in *Acta Arithmetica*, n° 88(1999) et n° 99(2001).

R. GUY, Problème D15, in *Unsolved Problems in Number Theory*, Springer, 2004.

J. ROBERTSON, *Magic squares of squares*, in *Mathematics Magazine*, oct. 1996.

Les nombres *Taxicabs*

Christian BOYER

L'histoire des mathématiques est riche des travaux des Fermat, Frenicle, Euler, Ramanujan qui ont « joué » à trouver des nombres *Taxicabs*. Avec l'ordinateur, de nouveaux records viennent d'être obtenus.

La Première Guerre mondiale vient de finir, l'armistice est signé depuis quelques semaines. Le mathématicien anglais Hardy prend un taxi pour aller dans un hôpital de la banlieue de Londres, rendre visite au génial mathématicien indien Ramanujan.

« Mon taxi était immatriculé 1729 », dit Hardy en arrivant dans la chambre de Ramanujan, « un nombre qui me semble sans intérêt, j'espère que ce n'est pas un mauvais présage pour ma visite d'aujourd'hui ».

« Non », lui répond Ramanujan, « c'est un nombre très intéressant ; c'est le plus petit nombre égal à la somme de deux cubes de deux façons différentes ».

C'est à la suite de cette anecdote qu'on dénomme *Taxicab*(n) le plus petit nombre décomposable de n façons différentes en somme de deux cubes. Ainsi 1729 est *Taxicab*(2).

Des défis de Fermat

Ramanujan n'est pas le premier à s'être intéressé à ces sommes de deux cubes. En 1657, il y a 350 ans, Fermat défie ses correspondants anglais et français avec deux problèmes :

- (1) Trouver deux nombres cubes dont la somme soit égale à deux autres nombres cubes.
- (2) Trouver deux nombres cubes dont la somme soit cube.

Ce qui revient à trouver des solutions entières aux deux équations :

$$(1) x^3 + y^3 = z^3 + w^3; (2) x^3 + y^3 = z^3.$$

Quelques semaines à peine après le défi de Fermat, le mathématicien Bernard Frenicle de Bessy fournit, sans donner sa méthode, les plus petites solutions au problème (1) dont ces deux premières : $1729 = 9^3 + 10^3 = 1^3 + 12^3$; $4104 = 9^3 + 15^3 = 2^3 + 16^3$.

Le problème (2) est le célèbre théorème de Fermat $x^n + y^n = z^n$, dans le cas n égal à 3 : c'est seulement un siècle plus tard, en 1770, qu'Euler prouve que l'équation n'a pas de solution en nombres entiers pour cette valeur de n . Et c'est seulement en 1993-1994 qu'Andrew Wiles prouve que le problème est impossible pour tout n supérieur à 2.

Fermat lui-même travaille sur les sommes de deux cubes. En réutilisant intelligemment des formules du mathématicien français Viète sur $x^3 = y^3 + z^3 + w^3$, il prouve que la

solution existe toujours : quel que soit n , il existe des nombres décomposables en sommes de deux cubes de n façons différentes. Le raisonnement sera repris par Hardy et Wright dans leur théorème n° 412 de *An Introduction to the Theory of Numbers*.

À la recherche de *Taxicab*(3)

Puisqu'il est ainsi prouvé que *Taxicab*(n) existe quel que soit n , le jeu est de le débusquer ! On connaît *Taxicab*(2) = 1729, quel est *Taxicab*(3) ?

Le mathématicien américain Escott pose la question en 1902 dans la revue française *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, une revue d'informations et de questions mathématiques fondée en 1894 par Laisant et Lemoine. Le terme *Taxicab* n'étant bien sûr pas encore utilisé, il demande la plus petite solution de l'équation : (3) $u^3 + v^3 = x^3 + y^3 = z^3 + w^3$.

Des solutions paramétriques des équations (1) et (3) existent, dues notamment à Euler et au Russe Werebrusow, mais elles ne permettent pas de savoir quelle est la plus petite solution. En 1908, le mathématicien André Gérardin répond dans cette même revue que la solution est probablement :

$$175\,959\,000 = 70^3 + 560^3 = 198^3 + 552^3 = 315^3 + 525^3.$$

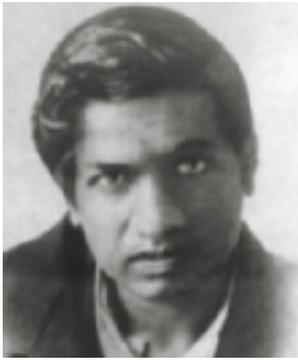
Mais le vrai *Taxicab*(3) est découvert en 1957, plus de 50 ans après la question d'Escott, et 300 ans après la découverte de *Taxicab*(2) par Frenicle. Grâce à une machine EDSAC, le mathématicien anglais John Leech publie dans *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* les cinq plus petites solutions de (3), la plus petite étant : *Taxicab*(3) = $87\,539\,319 = 167^3 + 436^3 = 228^3 + 423^3 = 255^3 + 414^3$.

André Gérardin avait donc tort, mais son nombre est néanmoins la quatrième plus petite solution de la liste de Leech.

De *Taxicab*(4) à *Taxicab*(19)

E. Rosenstiel, Dardis et C.R. Rosenstiel trouvent *Taxicab*(4) en 1989. C'est à nouveau Dardis, mais seul, qui trouve *Taxicab*(5) en 1994. Ce même *Taxicab*(5) est à nouveau trouvé, et donc confirmé, par D. Wilson en 1997, par D. Bernstein en 1998, puis encore en 2006 par Bill Butler.

Aujourd'hui, on ne connaît pas de façon sûre *Taxicab*(6). De 1997 à 2002, la plus petite solution connue à six façons,



London Vintage Taxi Association (photographie retouchée par l'auteur)



$$9^3 + 10^3 = 12^3 + 1$$

1. C'EST DANS UN TEL « TAXI CAB », IMMATRICULÉ 1729, que Hardy (à droite) a rendu visite à Ramanujan (à gauche). Ces taxis Unic, fabriqués en France, étaient les plus utilisés à Londres. L'égalité associée au nombre *Taxicab* (2) est de la main de Ramanujan.

<i>Taxicab</i> (2)	1729	Bernard Frenicle (France) 1657
<i>Taxicab</i> (3)	87539319	John Leech (UK) 1957
<i>Taxicab</i> (4)	6963472309248	Rosenstiel et al. (UK) 1989
<i>Taxicab</i> (5)	48988659276962496	J. Dardis (UK) 1994
<i>Taxicab</i> (6)	$\leq 24153319581254312065344$	R. Rathbun (États-Unis) 2002
<i>Taxicab</i> (7)	$\leq 24885189317885898975235988544$	Christian Boyer (France) Décembre 2006
<i>Taxicab</i> (8)	$\leq 50974398750539071400590819921724352$	
<i>Taxicab</i> (9)	$\leq 136897813798023990395783317207361432493888$	
<i>Taxicab</i> (10)	$\leq 7335345315241855602572782233444632535674275447104$	
<i>Taxicab</i> (11)	$\leq 2818537360434849382734382145310807703728251895897826621632$	
<i>Taxicab</i> (12)	$\leq 73914858746493893996583617733225161086864012865017882136931801625152$	
Pour les records de <i>Taxicab</i> (13) à <i>Taxicab</i> (19) voir le site Internet de l'auteur indiqué en bibliographie.		

<i>Cabtaxi</i> (2)	91	F. Viète (Fr.) P. Bongo (It.) 1591
<i>Cabtaxi</i> (3)	728	E. Escott (États-Unis) 1902
<i>Cabtaxi</i> (4)	2741256	R. Rathbun (États-Unis) 1992
<i>Cabtaxi</i> (5)	6017193	
<i>Cabtaxi</i> (6)	1412774811	
<i>Cabtaxi</i> (7)	11302198488	D. Bernstein (États-Unis) 1998
<i>Cabtaxi</i> (8)	137513849003496	
<i>Cabtaxi</i> (9)	424910390480793000	D. Moore (UK) 2005
<i>Cabtaxi</i> (10)	$\leq 933528127886302221000$	Christian Boyer (France) 2006-2007
<i>Cabtaxi</i> (11)	$\leq 8904950890305189093226944$	
<i>Cabtaxi</i> (12)	$\leq 1912223147184127402358643000$	
Pour les records de <i>Cabtaxi</i> (13) à <i>Cabtaxi</i> (30) voir le site Internet de l'auteur indiqué en bibliographie.		

2. RECORD DES NOMBRES *Taxicab* (n), le plus petit nombre décomposable de n façons différentes en somme de deux cubes (en haut), et records des nombres *Cabtaxi* (n), le plus petit nombre décomposable de n façons différentes en somme ou différence de cubes (en bas).

ou, autrement dit, la meilleure borne supérieure de *Taxicab* (6), était un nombre trouvé par Wilson. En juillet 2002, Randall Rathbun trouve une meilleure borne $\sim 2,4 \times 10^{22}$ de *Taxicab* (6), tout en indiquant : « Je ne pense pas que ce soit la plus petite valeur. » Il semble qu'il ait sous-estimé son résultat ! En effet C. S. Calude, E. Calude et M. J. Dinneen, de l'Université d'Auckland, en Nouvelle-Zélande, prouvent en 2003 que cette borne a une probabilité supérieure à 99 pour cent d'être vraiment *Taxicab* (6), et améliorent leurs résultats en 2005 avec une probabilité supérieure à 99,8 pour cent. Et les calculs de Bill Butler indiquent que *Taxicab* (6) est supérieur à $1,024 \times 10^{21}$. L'étau se resserre autour de *Taxicab* (6), et le nombre de Rathbun en est probablement la solution.

En novembre 2006, d'après Jean-Charles Meyrignac qui référence rigoureusement ces nombres dans sa page <http://euler.free.fr/taxicab.htm>, rien n'était encore trouvé sur *Taxicab* (7) et au-delà. On pourrait utiliser la méthode de Fermat pour avoir des nombres décomposables de sept façons ou plus, mais elle engendre des nombres monstrueux qui n'ont aucune chance d'être les plus petits possibles. Grâce à la méthode des facteurs coupants (voir l'encadré page 28), mes recherches de décembre 2006 et mai 2007 m'ont permis de trouver d'intéressantes bornes supérieures de *Taxicab* (7) jusqu'à *Taxicab* (19). Ce sont les meilleurs résultats connus. Ma borne de *Taxicab* (7) a des chances d'être *Taxicab* (7), mais la probabilité d'être *Taxicab* diminue quand n augmente, et ma borne de *Taxicab* (19) n'a presque aucune chance d'être *Taxicab* (19).

MÉTHODE DES FACTEURS COUPANTS

Si le nombre N est décomposable de n façons en somme de deux cubes, et si k^3N est décomposable de $n + 1$ façons, alors k est appelé un « facteur coupant » de N .

Le facteur k « coupe » k^3N en deux nouveaux cubes ; les n autres décompositions en somme de deux cubes sont simplement les multiples k^3 des décompositions déjà connues de N .

L'astuce est de travailler sur un *Taxicab* (n) et de trouver un petit k pour lequel k^3 *Taxicab* (n) soit décomposable de $n + 1$ façons. Par exemple, Gérardin ne l'avait pas remarqué, mais son nombre cité dans l'article est 35^3 fois 4104 (la deuxième solution trouvée par Frenicle) : sa seule vraie nouvelle décomposition est $198^3 + 552^3$, les deux autres décompositions étant 35^3 fois celles de 4104.

Mais comment obtenir la liste des décompositions de k^3N ? Un algorithme très simple pourrait suffire : tester, pour toutes les valeurs possibles de x , si $k^3N - x^3$ est lui-même un cube. Mais cet algorithme est vite incapable de travailler sur de grands nombres. Voici un bien meilleur algorithme. D'abord factoriser N , ce qui est ici facile, car les nombres *Taxicab* sont composés de nombreux petits facteurs. En déduire une liste de tous les couples (r, s) possibles résolvant $N = rs$, avec $r < s$. Puisque toute somme de deux cubes s'écrit : $N = rs = x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$, toute somme possible de deux cubes est une solution de ce système pour un des couples (r, s) : (a) $x + y = r$ et (b) $x^2 - xy + y^2 = s$.

Il faut rechercher des solutions entières de ce système en résolvant l'équation quadratique qui en résulte. Bien sûr, la plupart des couples (r, s) ne donnent pas de solution entière (x, y) . La méthode fonctionne également sur les nombres *Cabtaxi*.

Il serait fastidieux d'indiquer ici les décompositions de tous ces nombres. Voici toutefois celles de la borne de *Taxicab* (7). Ce nombre vaut 101^3 fois le nombre de Rathbun, qui est lui-même 79^3 fois *Taxicab* (5). Sa nouvelle décomposition, non multiple de 101^3 , est celle en bleu. Ce nombre 24 885 189 317 885 898 975 235 988 544 est-il vraiment *Taxicab* (7) ? Les décompositions sont numérotées de (1) à (7). (1) $2\,648\,660\,966^3 + 1\,847\,282\,122^3 =$ (2) $2\,685\,635\,652^3 + 1\,766\,742\,096^3 =$ (3) $2\,736\,414\,008^3 + 1\,638\,024\,868^3 =$ (4) $2\,894\,406\,187^3 + 860\,447\,381^3 =$ (5) $2\,915\,734\,948^3 + 459\,531\,128^3 =$ (6) $2\,918\,375\,103^3 + 309\,481\,473^3 =$ (7) $2\,919\,526\,806^3 + 58\,798\,362^3$ et différences de cubes $4\,965\,459\,364^3 - 4\,603\,244\,680^3 = 5\,702\,591\,300^3 - 5\,435\,167\,136^3$.

Après les *Taxicabs*, les *Cabtaxis* !

Après les *Taxicabs*, on définit *Cabtaxi* (n) le plus petit nombre décomposable en somme ou différence de deux cubes. Incroyable coïncidence, c'est la même année, en 1591, que deux mathématiciens, François Viète et Pietro Bongo, trouvent indépendamment la très belle équation $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$. En déplaçant seulement le terme 5^3 , on peut considérer qu'ils ont trouvé tous deux *Cabtaxi* (2) = $91 = 3^3 + 4^3 = 6^3 - 5^3$.

Euler a mentionné plusieurs solutions à trois façons, sa plus petite étant $87^3 - 79^3 = 20^3 + 54^3 = 38^3 + 48^3$, mais c'est Escott qui semble être le premier à avoir publié, en 1902, *Cabtaxi* (3) = $728 = 12^3 - 10^3 = 9^3 - 1^3 = 8^3 + 6^3$.

En 2005, le plus gros résultat connu est *Cabtaxi* (9), trouvé par Duncan Moore. Entre décembre 2006 et mai 2007, en utilisant toujours la méthode des facteurs coupants, j'ai trouvé des bornes supérieures de *Cabtaxi* (10) à *Cabtaxi* (30).

Voici les décompositions de ma borne de *Cabtaxi* (10). Ce nombre vaut 13^3 fois *Cabtaxi* (9), qui est lui-même 335^3 fois *Cabtaxi* (7). Sa nouvelle décomposition, non multiple de 13^3 , est en bleu. Qui pourra déterminer si la borne 933 528 127 886 302 221 000 est véritablement *Cabtaxi* (10) ?

Les différentes façons sont numérotées de (1) à (10). (1) $8\,387\,730^3 + 7\,002\,840^3 =$ (2) $8\,444\,345^3 + 6\,920\,095^3 =$ (3) $9\,773\,330^3 - 84\,560^3 =$ (4) $9\,781\,317^3 - 1\,318\,317^3 =$ (5) $9\,877\,140^3 - 3\,109\,470^3 =$ (6) $10\,060\,050^3 - 4\,389\,840^3 =$ (7) $10\,852\,660^3 - 7\,011\,550^3 =$ (8) $18\,421\,650^3 - 17\,454\,840^3 =$ (9) $41\,337\,660^3 - 41\,154\,750^3 =$ (10) $77\,480\,130^3 - 77\,428\,260^3$.

Ramanujan et Fermat avaient raison, les nombres *Taxicabs* et *Cabtaxis* sont riches de développements mathématiques intéressants. Gageons que l'aide informatique saura encore repousser les limites des nombres connus : tout record est fait pour être battu !

Cinq énigmes non résolues

1) Qui trouvera de plus petites bornes supérieures que celles actuellement connues ? Ou mieux, quelles sont les valeurs réelles de *Taxicab* (n) pour $n \geq 6$ et de *Cabtaxi*(n) pour $n \geq 10$?

2) Le plus petit nombre décomposable de deux façons différentes en somme de deux cubes de nombres premiers est $6\,058\,655\,748 = 61^3 + 1\,823^3 = 1\,049^3 + 1\,699^3$. Mais qui trouvera un nombre égal de trois façons différentes à la somme de deux cubes de nombres premiers ? Aucune solution n'est connue.

3) Problème équivalent au précédent, mais style *Cabtaxi*. Qui trouvera un nombre égal de trois façons différentes à la somme ou à la différence de deux cubes de nombres premiers ? De deux façons, la plus petite solution est : $62\,540\,982 = 397^3 - 31^3 = 1\,867^3 - 1\,861^3$.

4) Et si l'on utilisait des puissances 4 au lieu des cubes ? C'est Euler qui trouve le plus petit nombre égal de deux façons différentes à la somme de deux puissances 4 :

$$635\,318\,657 = 59^4 + 158^4 = 133^4 + 134^4.$$

Mais aujourd'hui encore, on ne connaît aucun nombre égal de trois façons différentes à la somme de deux puissances 4. Qui trouvera un tel nombre, ou prouvera que le problème est impossible ? La dernière plus grosse recherche date de 2006 : Jaroslaw Wroblewski n'a trouvé aucune solution inférieure à 10^{28} .

5) Qui construira un carré magique 4×4 composé de 16 cubes distincts ? Aucun n'est connu, mais la méthode de Morgenstern, qui utilise justement des nombres *Taxicabs* (voir *Énigmes sur les carrés magiques*, dans ce dossier), permettra peut-être à un lecteur d'en trouver.

Ch. BOYER est amateur d'énigmes mathématiques informatisables.

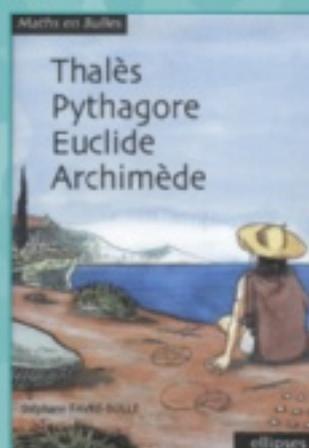
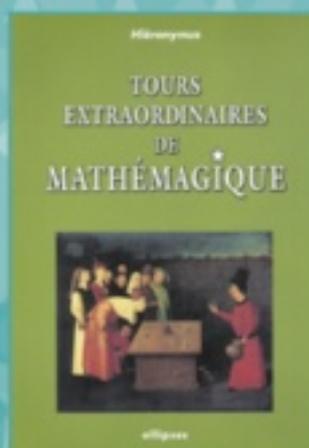
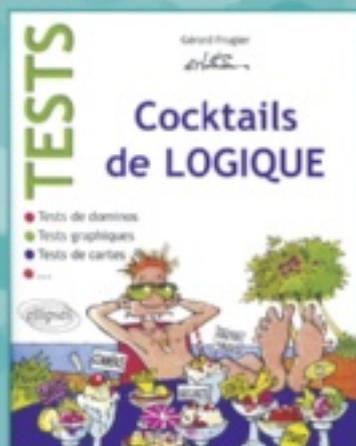
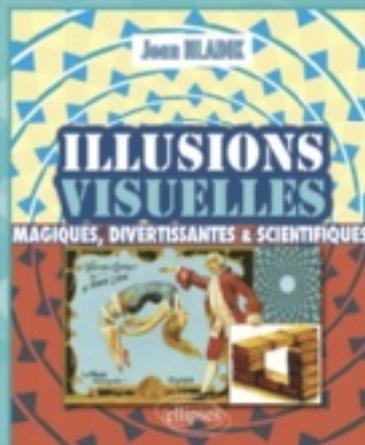
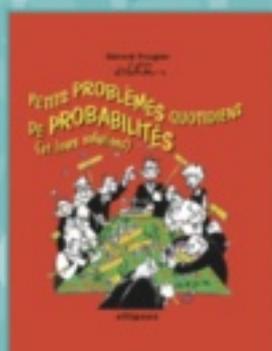
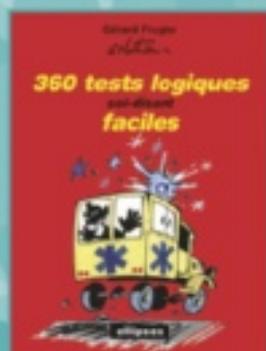
Christian BOYER, <http://cboyer.club.fr/Taxicab.htm>. Toutes les décompositions des nouvelles bornes *Taxicab* et *Cabtaxi* y sont téléchargeables.

Christian BOYER, *New upper bounds for Taxicab and Cabtaxi numbers*, in *Journal of Integer Sequences*, vol. 11, 2008, <http://www.cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/vol11.html>

Richard GUY, partie du problème D1 dans *Unsolved Problems in Number Theory*, 3^e édition, Springer, 2004.



1001 façons de faire des MATHS



B O N D E C O M M A N D E

à retourner aux Éditions Ellipses 32, rue Bague 75740 Paris cedex 15 • Tél : 01 45 67 74 19 • www.editions-ellipses.fr

Nom Prénom

Adresse

Code postal Ville

ISBN	Titre	Auteur(s)	Pages	Prix* unitaire	Quantité	TOTAL
2-7298-1852-9	360 tests logiques soi-disant faciles	G. FRUGIER, G. MATHIEU	160	8,50 €
2-7298-1121-4	Petits problèmes quotidiens de probabilités	G. FRUGIER, G. MATHIEU	150	9,50 €
978-2-7298-3411-1	Illusions visuelles : magiques, divertissantes et scientifiques	J. HLADIK	256	21 €
978-2-7298-3851-5	Ces nombres qui nous fascinent	J.-M. DE KONINCK	448	29 €
978-2-7298-3070-0	Statistiques. Méfiez-vous !	N. GAUVRIT	208	16 €
2-7298-2504-1	Cocktails de logique - Tests	G. FRUGIER, G. MATHIEU	128	9,50 €
2-7298-2649-1	Tours extraordinaires de Mathémagique	HIÉRONYMUS	144	12 €
2-7298-1953-3	Maths en bulles - Thalès, Pythagore, Euclide, Archimède	S. FAVRE-BULLE	96	14 €

Franco de port**

Ci-joint la somme de en chèque bancaire C.C.P. mandat postal

Règlement impérativement joint à la commande.

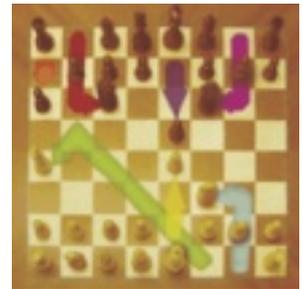
*Les prix indiqués sont des prix publics TTC au 1^{er} juin 2007 donnés sans engagement et susceptibles de modifications.

**Offre valable pour la France métropolitaine et les DOM-TOM.

Les meilleures stratégies

D'après Martin GARDNER

Elles reposent bien souvent sur des décisions aléatoires, donc imprévisibles pour l'adversaire !



La théorie des jeux traite surtout des jeux à deux joueurs (s'il y en a plus, le jeu est faussé par les alliances) et de somme nulle : un conflit entre deux personnes où ce qui est gagné par l'un est perdu par l'autre. Considérons le jeu « idiot » suivant : deux personnes, A et B, tendent simultanément un ou deux doigts. B donne alors à A autant d'euros qu'il y a de doigts tendus au total. A gagne toujours, mais combien ? Quelles stratégies A et B doivent-ils employer, A pour gagner le plus possible et B pour perdre le moins possible ? Dans la plupart des jeux, les coups possibles sont nombreux et compliqués, mais ici, chaque joueur n'a que deux possibilités : il peut tendre soit un doigt, soit deux. La matrice des gains est le tableau 2×2 de la figure 1a. Les deux possibilités pour A sont indiquées à gauche, celles de B au-dessus. Dans les cases, on note les gains dans chaque cas (les chiffres indiquent ce que B doit à A, et si A était le débiteur, la valeur serait précédée du signe moins). Ainsi, lorsque A tend un doigt et B deux, le gain est de trois euros pour A. Si A tend un doigt, il gagne au minimum deux euros ; s'il en tend deux, il gagne au minimum trois euros. Le plus grand de ces deux nombres (le 3 de la case inférieure gauche) est appelé le *maximin* (maximum des minima). Si B tend un doigt, il perd au plus trois euros, s'il en montre deux, il peut en perdre quatre. Le plus petit de ces deux nombres (là encore, le 3 de la case inférieure gauche) est le *minimax* (le minimum des maxima). Si le minimax et le maximin sont sur une même case, comme ici, le jeu a un *point selle*.

Chaque joueur a intérêt à choisir la stratégie contenant le point selle. A optimise ses gains en tendant toujours deux doigts, B réduit ses pertes en n'en tendant qu'un. Lorsque les deux joueurs adoptent la meilleure stratégie, B donne toujours trois euros à A. C'est la « valeur » du jeu. Tant qu'un des adversaires joue au mieux, il est sûr de recevoir une somme au moins égale à la valeur du jeu.

Transformons le jeu des doigts en jeu de la parité (l'équivalent du jeu de pile ou face) : quand les deux joueurs tendent le même nombre de doigts, A gagne un euro ; dans le cas contraire, c'est B qui gagne un euro. La matrice des gains est celle de la figure 1b. Puisque le *maximin* de A est -1 et que le *minimax* de B est $+1$, ce jeu n'a pas de point selle. Il serait absurde pour A de tendre toujours deux doigts puisqu'il suffirait à B d'en présenter toujours un pour gagner à tous les coups. Pour jouer le plus efficacement possible, chaque joueur doit mélanger les deux choix dans une proportion donnée (stratégie mixte) : ici, compte tenu de la symétrie du jeu, il est clair que la meilleure proportion est de tendre une fois sur deux, un doigt et une fois sur deux, deux doigts.

Générateur de nombres aléatoires

Pour que le nombre de doigts montrés soit imprévisible, on utilise un générateur de nombres aléatoires, car si A tend régulièrement un, puis deux doigts, B s'en apercevra et adoptera une stratégie gagnante. Mais si A essaie de choisir au hasard, mentalement, une structure inconsciente, mais réelle, subsistera. Pour choisir véritablement au hasard, on peut tirer à pile ou face.

La stratégie associée à la matrice du jeu de la figure 1c n'est pas évidente. Le joueur A dispose d'une carte à jouer de deux faces, obtenue en collant dos à dos un as noir et un 8 rouge. B détient une carte analogue composée d'un 2 rouge et d'un 7 noir. Les joueurs se montrent simultanément l'une des faces de leur carte. A gagne si les deux couleurs coïncident, B l'emporte dans l'autre cas. La valeur du gain est toujours égale, en euros, à la valeur de la carte du gagnant.

Le jeu semble équitable (sa valeur est nulle) puisque A peut gagner ($8 + 1 = 9$ €) autant que B ($7 + 2 = 9$ €). En réalité, B peut remporter en moyenne un euro tous les trois coups en utilisant une bonne stratégie. Puisque, sur une diagonale, 8 et 1 sont tous deux supérieurs à chacun des deux autres chiffres, nous déduisons qu'il n'y a pas de point selle. (Un jeu dont la matrice est d'ordre deux (2×2) possède un point selle si et seulement si les nombres d'une de ses diagonales ne sont pas tous les deux supérieurs à l'un quelconque des deux autres éléments du tableau.) Chaque joueur doit donc adopter une stratégie mixte convenable.

Nous donnerons (sans justification) la proportion optimale des choix de chaque joueur. Considérons la ligne supé-

	B			B			B		
A		2	3		1	-1		1	-2
		3	4		-1	1		-7	8

1. MATRICES DES JEUX (a) idiot, (b) de similitudes, (c) des cartes.

rieure de la matrice correspondant pour A à la présentation de l'as noir. Ôtons le second nombre du premier : $1 - (-2) = 3$ et faisons de même avec la seconde ligne : $-7 - 8 = -15$. Formons le rapport de ce second nombre au premier, en valeur absolue : $15/3$ soit $5/1$. La meilleure façon de jouer pour A est de choisir cinq fois son as pour une fois son 8. Pour déterminer aléatoirement son coup, A peut utiliser un dé : il jouera l'as si le dé indique 1, 2, 3, 4 ou 5 et le 8 s'il tire un 6. Il faut bien sûr que le résultat du jet de dé soit caché à l'autre joueur qui, dans le cas contraire, connaîtrait la réponse appropriée.

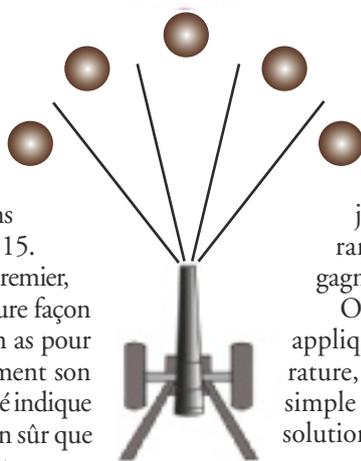
On calcule de même la meilleure stratégie pour B en opérant sur les colonnes. La première donne $8 = 1 - (-7)$ et la seconde $-10 = -2 - 8$. D'où le rapport $10/8$, encore égal à $5/4$. La meilleure tactique pour B est de montrer cinq fois le 7 pour quatre fois le 2. Pour que la répartition soit aléatoire, il peut utiliser une suite de chiffres aléatoires compris entre 1 et 9. Il jouera le 7 quand 1, 2, 3, 4 ou 5 apparaîtront et le 2 pour 6, 7, 8 ou 9. Si A emploie sa meilleure tactique, la proportion 5 pour 1 des deux choix, il limite ses pertes à un tiers d'euro par coup. Tant que B joue ses cartes dans la proportion $5/4$, il s'assure un gain minimum de un tiers d'euro. Le lecteur pourra étudier ce jeu pour d'autres valeurs de cartes.

Dans la plupart des jeux qui se jouent à deux sur un damier, comme les échecs et les dames, la partie se déroule jusqu'à la victoire de l'un des deux ou jusqu'à la nullité. Mais le nombre de coups joués est grand et le nombre de coups possibles plus encore ; les matrices de ces jeux sont gigantesques. Lorsque le jeu est fini (chaque joueur doit jouer un nombre fini de coups et il dispose d'un nombre fini de possibilités pour chaque coup), von Neumann a démontré qu'il y a au moins une stratégie pure optimale qui conduit l'un des deux joueurs à la victoire, ou bien les deux peuvent adopter des stratégies pures qui entraînent la nullité.

Le choix de la cachette

Un soldat peut se cacher dans l'un des trous dessinés sur la figure 2, en haut de la page. Son adversaire, le canonier, peut viser l'un des quatre points A, B, C ou D. Un tir tuera le soldat s'il atteint un point adjacent au trou où il est caché : un tir en B, par exemple, sera fatal au soldat qui se trouve dans les terriers 2 et 3. Les trous extrêmes ne peuvent être détruits que par un seul tir, alors que les terriers intermédiaires sont atteints par deux, et le soldat est enclin à vouloir se cacher dans un de ces trous extrêmes. Malheureusement, le canonier peut prévoir ce raisonnement et ne tirer qu'en A ou en D. Si le soldat soupçonne de telles pensées chez son adversaire, il se cachera dans le trou central. Mais le tireur peut encore le surpasser en finesse s'il devine que le soldat pense qu'il pensera comme cela, et il visera donc au centre. Ces raisonnements spéculaires n'amènent rien (voir *La lettre volée* d'Edgar Poe) et le seul moyen dont dispose chaque joueur pour tromper l'autre est l'emploi de stratégies mixtes.

Quelles sont les stratégies optimales des joueurs ? Le soldat a le choix entre cinq trous pour se cacher et un canonier peut tirer sur quatre points situés chacun entre deux



2. LE SOLDAT et le canonier.

terriers adjacents. On peut fabriquer un jeu équivalent avec cinq cartes dont un as. Un joueur les dispose faces cachées sur une même rangée, l'autre tire deux cartes adjacentes et gagne si l'une d'elles est un as.

On peut écrire la matrice 4×5 du jeu et lui appliquer les théorèmes généraux tirés de la littérature, mais avec un peu d'habitude, dans un cas simple comme celui-ci, on trouve intuitivement la solution, puis on la vérifie.

La meilleure stratégie mixte pour le soldat consiste à se cacher dans l'un des trous 1, 3 ou 5, avec une fréquence de $1/3$ pour chacun d'eux. Le canonier a le choix entre une infinité de stratégies optimales : il attribue à A et à D des probabilités $1/3$ et $1/3$ et à B et C des probabilités quelconques dont la somme est $1/3$. Il peut, par exemple, leur affecter la même probabilité $1/6$, ou bien il peut donner une probabilité de $1/3$ à l'un et de zéro à l'autre.

Pour vérifier que ces stratégies sont bien optimales, étudions d'abord la probabilité de survie du soldat. Si le canonier tire en A, le soldat a deux chances sur trois de s'en tirer (quand il est en 3 ou en 5). Il en va de même pour un tir en D. Si le tir aboutit au point B, le soldat n'est tué que s'il était caché dans le trou numéro 3, et il a encore deux chances sur trois d'être épargné. Il en est de même quand le canonier tire en C. Puisque tous les choix du canonier donnent au soldat une probabilité de survie de $2/3$, cette probabilité est constante quelle que soit la stratégie employée par le canonier.

Examinons le point de vue du canonier. Si le soldat est dans le trou 1, il a une chance sur trois de l'atteindre ; si le soldat est dans le trou 2, il ne sera touché que si le canonier vise en A ou en B ; donc la probabilité de réussite est de $1/3$, plus la probabilité que le canonier avait attribuée à B. Si le soldat est en 3, il n'est tué que si le canonier tire en B ou en C, auxquels il a attribué une probabilité globale de $1/3$. Donc la probabilité de tuer le soldat est de $1/3$. Si le soldat est en 4, sa probabilité d'être tué est de $1/3$ plus la probabilité attribuée à C. S'il est en 5, la probabilité est de $1/3$. Cette stratégie garantit au canonier une probabilité de réussite de $1/3$.

Le canonier est assuré d'une probabilité de réussite d'au moins $1/3$. Il est possible qu'elle soit plus importante si son adversaire est stupide, mais face à une opposition correcte, il ne peut espérer plus puisque, comme nous l'avons vu, le soldat dispose d'une stratégie lui assurant une probabilité de décès au plus égale à $1/3$. Un raisonnement identique est tenu par le soldat. En utilisant sa stratégie optimale, il en réchappe deux fois sur trois et il ne peut espérer mieux puisque le canonier a une stratégie qui lui assure au minimum une probabilité de réussite de $1/3$. Pressentir la solution n'est pas aussi difficile qu'il y paraît, ajoute Isaacs. Pour s'en convaincre, le lecteur pourra généraliser le problème à n trous. Si n est impair, la solution précédente se généralise d'une manière presque évidente. Si n est pair, on rencontrera quelques nouveautés.

Martin GARDNER a fait ses études à l'Université de Chicago et a tenu la rubrique « Mathematical Games » de *Scientific American* de 1956 à 1981.

Martin GARDNER, *Math' festival*, Belin-Pour la Science, 1980.

Jeux de suites

Éric ANGELINI



Certaines suites suscitent l'étonnement et le plaisir : elles sont identiques ou complétées quand on en décrit certaines caractéristiques, comme les différences entre termes ou leur propre description.

Le site de Neil Sloane, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* recense plus de 130 000 suites de nombres entiers, un vrai trésor ! Il y a la suite des nombres pairs, celle des nombres premiers, celle de Fibonacci, celle des manières d'obtenir certains tirages au poker, celle des *Cake numbers* (les parts de gâteau que détermine n coups de couteau), celle des opus des symphonies de Beethoven, etc. Le domaine est riche et troublant à la fois : qu'est-ce qu'une suite de nombres, finalement ? Un chapelet de rochers isolés permettant qu'on traverse une rivière en crue ? Une loi cachée gouvernant la naissance des lapins ? La froide description du réel par des zéros et des uns ? C'est tout cela, bien sûr – et mille broderies pour l'œil aussi.

Les suites sont souvent un élément sérieux et un peu aride du mathématicien, lequel cherche à déceler une régularité permettant l'expression d'un terme général. De même le physicien essaie-t-il d'interpréter une suite de mesures afin de formuler des hypothèses déterminant les causes des phénomènes observés.

Nous considérerons ici les suites pour elles-mêmes, leur beauté, l'incongruité de certaines, leur mystère parfois, et promènerons, tel un romancier des nombres, un miroir le long de cette route.

Des nombres avec des mots

La suite ci-dessous n'est composée que de mots et tous ces mots sont des nombres. Chaque nombre regarde à gauche, vers le début de la suite, et dit combien de lettres ont déjà été écrites avant lui :

[S1] : Zéro, quatre, dix, treize, dix-neuf, vingt-six, trente-quatre, quarante-six, cinquante-six...

À gauche de « zéro » il n'y a aucune lettre, donc zéro, mais à gauche de « quatre » il y a les quatre lettres de... zéro ! À gauche de « dix » il y a bien dix lettres : les quatre de zéro plus les six de quatre, etc.

Pour passer d'un terme au suivant, il suffit d'ajouter au dernier nombre écrit la quantité de lettres utilisées par lui. Comme « cinquante-six » fait douze lettres, le nombre suivant sera « soixante-huit » ($56 + 12 = 68$).

Question 1 : Quels seraient, sur le même modèle, les premiers

termes d'une suite décrivant pas à pas le nombre cumulé de voyelles qui la composent ?

Les réponses aux questions sont données en fin d'article.

Voici une autre série de mots/nombres :

[S2] : Un, quatre, cinq, huit, dix, quatorze, quinze, dix-huit, vingt et un, vingt-deux, ...

Cette séquence-ci décrit la position de ses voyelles dans la succession générale des lettres : la première voyelle est en position « un » (c'est le u de un), la deuxième voyelle est en position « quatre » (c'est le u de quatre qui est bien la quatrième lettre de la suite), la voyelle suivante est en position « cinq » (c'est le a de quatre), etc. Toutes les voyelles sont ainsi décrites, aucune n'est laissée de côté et la suite croît (on dit qu'elle est monotone et strictement croissante, chaque terme étant supérieur à son voisin de gauche).

Peut-on trouver une séquence équivalente qui décrit le rang de ses propres consonnes ? Non, c'est impossible (en français), car aucun début ne convient : les mots un, deux, trois, quatre, cinq, six, ... n'ont pas, respectivement, leur première consonne en position un, deux, trois, quatre, cinq, six...

Il faut alors se tourner vers les suites non monotones – lesquelles décrivent aussi la position de toutes leurs consonnes, mais pas dans leur ordre d'apparition, comme ici où nous avons choisi quatre pour premier nombre :

Question 2 : Quelle est l'unique suite non monotone décrivant toutes ses consonnes et comportant dix nombres inférieurs à 13 (la suite [S3] ci-dessus n'en comporte que sept) ?

[S3] : Quatre, un, cinq, huit, neuf, onze, douze, treize, seize, ...
1 45 8 9 11 1 1 1 2 2
- - - - 12 3 6 7 0 1

Question 3 : Quelle est l'unique suite non monotone décrivant le rang de toutes ses consonnes et commençant par six nombres pairs inférieurs à 20 ?

Premières différences

Douglas Hofstadter a laissé son nom à la suite ci-dessous, dans son livre *Gödel, Escher, Bach* :

[S4] : 1 3 7 12 18 26 35 45 56 69 83 98 114 131 ...

Écrivons sous [S4] la suite [d] des premières différences (ce sont les quantités qui séparent un terme de son voisin) :

Question 10 : Trouver les quinze autres suites « avec les 2 en position paire » qui respectent ces cinq conditions.

Voici une quatrième suite aux motifs mêlés :

[S11] : 0, 0, 1, 2, 1, 3, 2, 4, 5, 3, 6, 7, 4, 8, 5, 9, 10, 6, 11, 7, 12, 13, 8, 14, 15, 9, 16, 10, 17, 18, 11, 19, 20, 12, 21, 13, 22, 23, 14, 24, 15, 25, 26, 16, 27, 28, 17, 29, 18, 30, 31, 19, 32, 20, 33, 34, 21, 35, 36, 22, 37, 23, 38, 39, 24, 40, 41, 25,...

Cette suite surprenante (elle oscille avec une amplitude qui augmente sans cesse) est constituée des paires successives d'entiers 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, ... disposées de manière à ce qu'entre deux « 0 » il n'y ait aucun nombre, entre deux « 1 » il y en ait un seul, entre deux « 2 » il y en ait deux, entre deux « 3 » il y en ait trois... etc. Il y a donc toujours n nombres entre deux « n » (on trouve par exemple 10 nombres entre les deux « 10 » de la séquence : ce sont 6, 11, 7, 12, 13, 8, 14, 15, 9, 16).

Question 11 : Essayez de trouver un début de suite similaire comptant les chiffres (et non les entiers) circonscrits par chaque paire de nombres (on trouvera donc ici 10 chiffres entre les deux « 10 » de la suite, et non dix nombres).

Il existe des entiers qui entrelacent et comptent leurs propres chiffres de la même façon. Baptisons-les « de Skolem-Langford » (ou SL), du nom des mathématiciens qui les popularisèrent. Examinons 2002 par exemple : 2002 a bien deux chiffres entre ses « 2 » et zéro chiffre entre ses « 0 ». De même pour 231213 : il a un seul chiffre entre ses « 1 », deux chiffres entre ses « 2 » et trois chiffres entre ses « 3 ». De même encore pour 131003 : un chiffre entre ses « 1 », zéro chiffre entre ses « 0 » et trois chiffres entre ses « 3 ». Voici le début de la suite des nombres SL, lesquels décrivent la quantité de chiffres « autoparenthésés » en leur sein :

[S12] : 2002, 131003, 231213, 300131, 312132, 420024, ...

Question 12 : Les 27 termes suivants de la suite ont huit chiffres : quels sont les cinq plus petits ?

La suite [S12] ne se poursuit pas à l'infini, elle s'arrête en raison du nombre limité de chiffres disponibles : en effet vingt chiffres au maximum peuvent entrer dans l'écriture d'un nombre SL (deux « 0 », deux « 1 », deux « 2 », ... deux « 9 ») :

Question 13 : Quel est le plus grand nombre SL ? (Pour tout chiffre k présent, il comporte k chiffres placés entre deux k .)

Réécritures de suites

Nous avons vu plus haut ce qu'est le « squelette » d'une suite de nombres : c'est la succession des chiffres qui l'écrivent. Voici la suite des nombres pairs :

[S13] : 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42,...

Elle a pour squelette :

2,4,6,8,1,0,1,2,1,4,1,6,1,8,2,0,2,2,2,4,2,6,2,8,3,0,3,2,3,4,3,6,...

On remarque vite qu'à un squelette donné peuvent correspondre plusieurs suites. En voici une de même squelette que ci-dessus :

[S14] : 2468101, 21, 41, 61, 82022242628303, 23, 43, 63,...

[S13] et [S14] ont même squelette, mais [S14] fut conçue pour ne comporter que des nombres impairs et tous différents ! On a donc ici, paradoxalement, deux suites de même squelette, la suite des nombres pairs (ordonnés) et la suite des nombres impairs (en désordre). Vertige des réécritures ! Deux ensembles disjoints « de même squelette » se partagent tous les entiers ! Malgré les apparences, tous les nombres impairs finiront tôt ou tard par apparaître dans [S14] : par construction, en effet, le plus petit entier impair non encore présent dans la suite et compatible avec le squelette de [S13] sera choisi pour prolonger celle-ci. Et cet entier ne peut commencer par un zéro, évidemment.)

Question 14 : Réécrire sur le même principe la suite [S15] des nombres impairs à l'aide de nombres pairs tous différents : [S15] : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41,...

Question 15 : Réécrire sur le même principe la suite [S16] des nombres premiers à l'aide de nombres non premiers tous différents :

[S16] : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73,...

Question 16 : Réécrire la suite [S17] des entiers naturels par elle-même ! (Oui, c'est possible, il suffit d'exiger qu'aucun terme de la suite d'origine n'occupe le même rang dans sa réécriture ; ainsi le 20^e terme de [S17] ne peut-il être le même que le 20^e de la solution. Ceci interdit à la suite cherchée de commencer par « 1 », car ce « 1 » occuperait le même rang dans les deux suites. Elle commencera donc par 12, 34, 56, ...)

[S17] : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, ...

Tableaux autoréférents

Le nombre 6210001000 est bien connu des amateurs d'autoréférence, car il est l'un des rares qui soit « autobiographique ». Voici comment il décrit ses propres éléments constitutifs :

Élément	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Occurrences	6	2	1	0	0	0	1	0	0	0

On voit grâce au tableau que 6210001000 autodécrit le nombre de « 0 » qu'il comporte (il y en a six), le nombre de « 1 » (il y en a deux), le nombre de « 2 » (il y en a un), le nombre de « 3 » (il y en a zéro), etc., jusqu'au nombre de « 9 » (toujours zéro).

La suite [S18] des nombres autobiographiques s'obtient en fabriquant sur le modèle ci-dessus tous les tableaux Éléments/Occurrences possibles. C'est 1210 qui ouvre le bal :

Élément	0	1	2	3
Occurrences	1	2	1	0

Le nombre suivant est 2020, lequel provient du même tableau :

Élément	0	1	2	3
Occurrences	2	0	2	0

Voici la suite des nombres autobiographiques tradi-

1

6

0

3

4

17

14

21

23

24

2. QUELLE EST LA LOI DU CLASSEMENT DES NOMBRES DE CETTE SUITE ?

tionnels : [S18] : 1210, 2020, 21200, 3211000, 42101000, 521001000, 6210001000.

Peut-elle être prolongée ? Oui, à condition que nous étendions le tableau au-delà de « 9 » et que nous voyions les « éléments » comme des sous-chaînes de symboles plutôt que comme des chiffres :

Sous-chaîne | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

Occurrences | 5 | 3 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |

Il faut interpréter le « 2 » placé sous la case « 10 » comme la quantité de sous-chaînes [10] visibles dans le nombre 53110100002. Nous en trouvons deux, en effet (en plus des sous-chaînes traditionnelles [0],[1],[2]... [9]), elles sont soulignées ici : 53110100002.

Le même tableau livre une autre solution, le nombre, 62200010001 :

Sous-chaîne | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

Occurrences | 6 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Solutions :

La suite de la figure 1 est celle des nombres de 0 à 10 par ordre alphabétique. Même extrapolée à l'infini, cette suite a pour dernier terme zéro. Le n-ième terme de la suite de la figure 2 est le plus petit entier comportant (n + 1) lettres dans son écriture en français ; les termes suivants sont 34, 43, 44, 54, 74, 84, 97, 154, 174...

Solution 1 : La suite des nombres décrivant (en français) la somme cumulée des voyelles utilisées est : 0, 2, 4, 7, 8, 10, 11, 13, 16,...

Solution 2 : La suite non monotone de nombres décrivant le rang de ses propres consonnes (avec dix nombres inférieurs à 13) est : 20, 23, 1, 5, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 15,...

Solution 3 : La suite non monotone qui décrit le rang de ses propres consonnes et qui commence par six nombres pairs inférieurs à 20 est : 12, 4, 6, 10, 14, 18, 1, 9,...

Solution 4 : La suite « paire » de Hofstadter est : 2, 6, 14, 24, 36, 52, 70, 90,...

Solution 5 : Les six premiers termes d'une séquence croissante commençant par « 2 » et de même squelette que la suite de ses premières différences est : 2, 24, 28, 311, 312, 325,...

Solution 6 : Le 2137453^e et dernier terme de la « suite des virgules » est 99999945.

Solution 7 : Les premiers termes d'une suite « des virgules » commençant par « 2 » sont : 2, 24, 71, 89, 180, 181, 192, 214, 256, 319,...

Solution 8 : La suite de Kolakoski commençant par « 2 » est : 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2,...

Solution 9 : La suite 1-3 de Kolakoski commence ainsi : 1, 3, 3, 3, 1, 1, 3, 3, 3, 1, 3, 1, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 1, 3, 3, ...

Solution 10 : Les quinze suites cherchées « avec les 2 en position paire » sont :

0,2,12,32,42,52,62,72,82,92,121,202,...

0,2,12,32,42,52,62,72,82,92,123,202,...

0,2,12,32,42,52,62,72,82,92,124,202,... etc. jusque :

0,2,12,32,42,52,62,72,82,92,129,202,... et :

0,2,3,20,21,23,24,25,26,27,28,29,202...

0,2,4,20,21,23,24,25,26,27,28,29,202...

Avec cette convention [S18] devient :

[S18] : 1210, 2020, 21200, 3211000, 42101000, 521001000, 6210001000, 53110100002, 62200010001.

Question 17 : Trouver cinq nombres autobiographiques supplémentaires (il faut prolonger le tableau des sous-chaînes au-delà de [10] et lui ajouter successivement les colonnes [11], [12], [13], etc.).

Éric ANGELINI est journaliste, producteur de télévision, amateur de chiffres et de lettres.

<http://www.livres-chapitre.com/~P06EFD/-ANGELINI-ERIC;-LEHMAN-DANIEL/-MOTS-EN-FORME.html>

<http://www.cetteadressecomportecinquantesignes.com>

La plupart des suites de cet article viennent du site de Neil Sloane : <http://www.research.att.com/~njas/sequences/>. Que ce dernier, et tous ses auteurs, en soient remerciés.

0,2,5,20,21,23,24,25,26,27,28,29,202... etc. jusque : 0,2,9,20,21,23,24,25,26,27,28,29,202...

Solution 11 : Aucun algorithme efficace de construction de suite comptant les chiffres circonscrits par des paires consécutives de nombres ne semble exister à l'heure actuelle. En trouverez-vous un ? Le début de cette suite-ci ne la préserve malheureusement pas d'un blocage futur : 0, 0, 1, 2, 1, 3, 2, 4, 5, 3, 6, 7, 4, 8, 5, 12, 6, 9, 7, 11, 8, 100, 10, 9, 12, 13, 11, 101, 10, 14, 16, 18, 13, 19, 21, 17, 22, 14, 20, 16, 23, 18, 102, 19, 17, 21, 103, 22, 20, 15, 104, 23,...

Solution 12 : Voici tous les nombres SL de huit chiffres rangés par ordre croissant : 12132003, 14130043, 15120025, 23121300, 23421314, 25121005, 25320035, 30023121, 31213200, 31413004, 34003141, 40031413, 41312432, 45001415, 45121425, 45300435, 50012152, 51410054, 52002151, 52412154, 53002352, 53400354, 61310036, 62312136, 63001316, 63121326, 64200246. Les nombres de la liste qui contiennent toutes les paires allant de 0 à n (12132003 par exemple va de 0 à 3), et pas certaines paires, comme la majorité des termes ci-dessus, pourraient être qualifiés de « SL-forts ».

Solution 13 : Le plus grand nombre « de Skolem-Langford » est 978416154798652002.

Solution 14 : Voici la réécriture de la suite des impairs par des nombres pairs tous différents : 1357911131517192, 12, 32, 52, 72, 931333537394, 14, 34, 54, 74,...

Solution 15 : Voici la réécriture de la suite des nombres premiers par des nombres non premiers tous différents : 235, 711, 1, 3171, 9, 232, 93, 1374, 14, 34, 75, 35, 96, 16, 77, 1737,...

Solution 16 : Voici la réécriture de la suite des naturels par eux-mêmes, aucun nombre n'occupant le même rang qu'au-paravant : 12, 34, 56, 78, 910, 1, 11, 2, 131, 4, 151, 6, 171, 8, 1920, 212, 22, 3, 242, 5, 262, 7, 282, 9, 303, 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83, 940, 414, 24, 344, 454, 64, 74, 84, 950, 515, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 960, 616,...

Solution 17 : Voici cinq nombres autobiographiques supplémentaires : 541011000021, 6401101000310, 74011001003100, 840110001031000, 9321000001201000. Y en a-t-il d'autres ?

Il n'y a pas moyen de moyenner !

Philippe BOULANGER

Les (nombreux) pièges de calcul de moyenne sont tristes ou délectables selon que l'on aime ou non les paradoxes...

Comme il est triste qu'existent aujourd'hui si peu d'informations inutiles !

Oscar Wilde

Pour calculer une moyenne, nous mesurons la valeur d'une quantité (une note) pour tous les membres appartenant à un ensemble (les élèves d'une classe par exemple), nous additionnons toutes ces valeurs et nous divisons par le nombre de membres (il existe d'autres moyennes, mais elles sont moins utilisées). Le calcul de la moyenne est simple, mais quelles qualités lui attribuer ? De se « situer » prétend-on. Mais soyons prudents : il est difficile de résumer significativement un ensemble de données par un nombre, que ce soit des notes à un examen, le nombre d'enfants par couple, l'espérance de vie d'individus d'âge donné, le salaire, etc. Nous interpréterons ici les conséquences de la mesure d'une moyenne.

Si rien ne semble plus banal qu'une moyenne, son calcul peut avoir des conséquences politiques notables. Le mathématicien belge Adolphe Quételet (1796-1874), fondateur de la statistique moderne, avait constaté que de nombreuses données comme la taille et le poids d'un individu choisi dans une population varient avec le temps autour de valeurs moyennes et que ces variations avaient des causes. Il présentera en 1835, dans son ouvrage intitulé *Sur l'homme et le développement de ses facultés ; Essai d'une physique sociale*, les lois qui « régissent » l'homme du point de vue physique, intellectuel et moral.

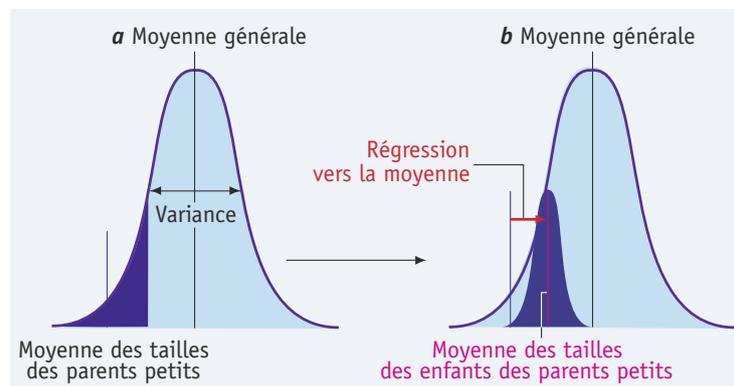
L'homme moyen (en tout) d'une population est, selon Quételet, l'individu dont les caractéristiques physiologiques sont chacune égales à la moyenne des caractéristiques physiologiques des autres individus de la population. Selon un point de vue qui persiste aujourd'hui, cet individu est idéal, car il éviterait de multiples études de marché pour lancer un produit : le goût de l'homme moyen déterminerait sa vente.

Reste à savoir si cet homme existe, et le mathématicien Antoine Augustin Cournot (1801-1877) se moque

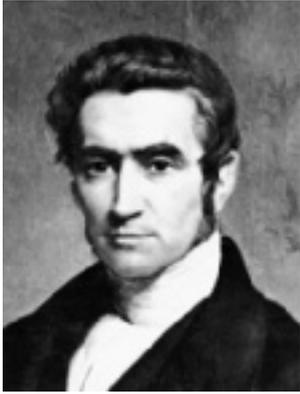
de Quételet en montrant que, parmi un ensemble de triangles rectangles, le triangle rectangle moyen (par exemple de périmètre moyen et d'aire moyenne) obtenu par Quételet n'est même pas rectangle. Plus simplement : si on prend la moyenne du périmètre et de l'aire de la surface de carrés de côté 1 et 2 cela fait $(4 + 8)/2 = 6$ pour le périmètre (donc un côté de longueur 1,5) et $(1 + 4)/2 = 2,5$ pour l'aire. Or le carré de côté 1,5 a pour surface 2,25 !

Similairement, si une série de données ne comporte que des nombres entiers, comme le nombre d'enfants, la moyenne n'est en général pas entière et ne peut représenter un élément : paradoxalement, l'homme moyen est exceptionnel.

Revenons à Quételet, qui mesure le nombre annuel moyen de crimes (en France), trouve qu'il est relativement constant et pose la grave question de la responsabilité de l'État. Si ce nombre ne varie pas : « C'est la société qui, en quelque sorte prépare tous les crimes dont les assas-



1. LA TAILLE DES ADULTES ou les notes à un examen se répartissent autour d'une moyenne. La variance mesure les écarts par rapport à cette moyenne. Si l'on sélectionne des enfants de parents petits, leurs enfants devenus adultes, sont, en moyenne, de plus grande taille que leurs parents, mais plus petits que la moyenne générale : c'est la régression vers la moyenne.



2. QUÉTELET (À GAUCHE) ET FLORENCE NIGHTINGALE (AU CENTRE) attirèrent l'attention de la reine Victoria sur la mauvaise hygiène et le manque de soin dans les hôpitaux militaires anglais. Florence Nightingale montra sur le diagramme « polaire » de Quételet que, pendant la guerre de Crimée (1854-1856), la plupart des blessés mouraient de maladies contagieuses (*secteurs bleus*) et non de leurs blessures (*secteurs roses*).

sins ne sont que les exécutants... » Cette constatation, qui diminuait la responsabilité individuelle des criminels, heurtera les milieux politiques conservateurs, et la physique sociale était un anathème contre le libre arbitre.

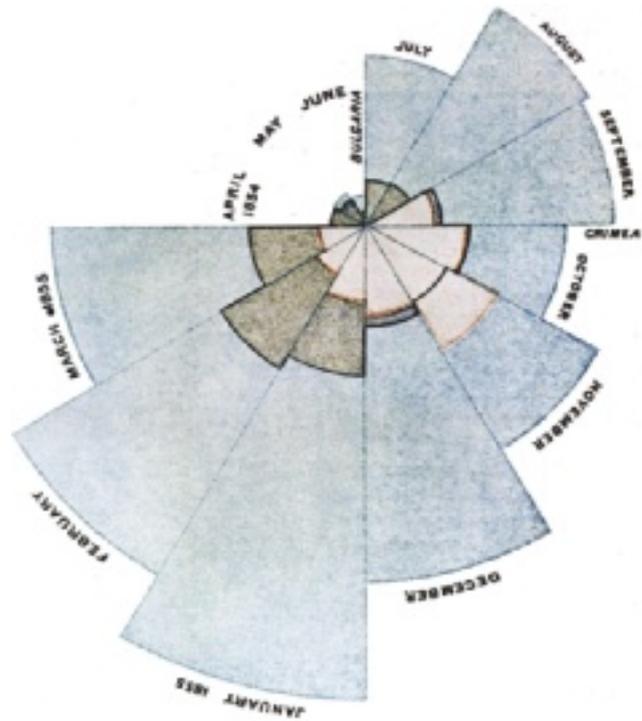
La statistique sociale de Quételet aida Florence Nightingale à fonder la profession d'infirmière. Les statistiques de Quételet sur le nombre moyen de décès mensuels montrèrent que les blessés de la guerre de Crimée mouraient plus d'infections et de manque de traitement à l'hôpital que des blessures sur le champ de bataille. Pour renforcer son argumentation, Quételet inventa les présentations en fromage (*voir la figure 2*). Les députés anglais écoutèrent Florence Nightingale et créèrent un corps de *nurses* pour soigner les blessés, militaires et civils. Cet exemple fut suivi dans tous les pays du monde.

Notre attitude vis-à-vis de la moyenne est fluctuante : il est douloureux de penser qu'à un examen, environ la moitié des élèves ont une note en dessous de la moyenne ! Une réflexion antagoniste, donc plus valorisante, est que « l'homme dépasse l'homme » et que chacun d'entre nous est exceptionnel. En effet, une moyenne inclut généralement de nombreuses caractéristiques, et même si notre moyenne est inférieure à cette moyenne générale, nous sommes presque tous supérieurs à « l'homme moyen » dans une de ces caractéristiques.

La régression vers la moyenne

La théorie de la « régression vers la moyenne » fait que l'exceptionnel revient « par nature » vers la moyenne : si nous ne devons pas trop souffrir de nos insuffisances, nous pouvons longtemps nous targuer de nos supériorités : elles ne sont souvent que temporaires.

Il a été remarqué que les élèves qui avaient de bonnes notes à des partiels en mars réussissaient moins bien aux examens de juin ; réciproquement, ceux qui avaient eu de mauvaises notes en mars amélioreraient leur score en juin. Comme l'âme humaine recherche des causes partout, les



examineurs prétendaient que les élèves aux bons scores de mars s'étaient reposés sur leurs lauriers, tandis que les mauvaises notes avaient incité les élèves dits insuffisants à remonter leurs notes par un meilleur travail. En réalité, les scores aux examens sont sujets à fluctuations dues au hasard et à une multitude de paramètres. Ceux qui ont eu de bonnes notes ou de mauvaises notes par chance sont revenus à leur état réel « moyen » en juin. On remarque de même qu'un entraîneur qui n'a pas eu de bons résultats dans un club en obtient de bien meilleurs dès qu'il en change : toujours la régression vers la moyenne.

Il est d'ailleurs curieux qu'on utilise le mot de régression alors que, pour la moitié des cas, il s'agit d'une amélioration. La régression vers la moyenne est une observation de Francis Galton qui avait remarqué que les enfants de parents très grands sont, en moyenne, moins grands que leurs parents, et que les enfants de parents petits sont plus grands que leurs parents (*voir la figure 1*).

La logique peut être fallacieuse : quiconque se munit d'un gri-gri lorsque des circonstances lui sont adverses sera persuadé de son effet bénéfique quand les conditions s'améliorent, alors qu'il ne s'agit souvent que d'une régression vers la moyenne. Un moyen de mesurer l'efficacité de la cause présumée du mieux-être, l'effet d'un médicament par exemple, est de comparer, dans les mêmes conditions contrôlées, les efficacités d'un médicament avec un placebo.

On a aussi remarqué que les sportifs qui avaient eu leur photographie à la une d'un magazine obtenaient de moins bons résultats après cette consécration. Certains champions refusent même de se faire photographier, craignant un phénomène de cause à effet, alors qu'il ne s'agissait évidemment que d'une régression due à des circonstances moins favorables après la prise de la photographie (cette photographie elle-même avait été suscitée par un exploit dû à des circonstances exceptionnellement propices).

Industriellement, la régression vers la moyenne a suscité des suspensions. Comme le relate le statisticien François Rodolphe, un industriel recherchait des roches aurifères et

LE JEU DE LA MOYENNE

Les divertissements mathématiques incluent toujours une part de jeu, et nous allons examiner un jeu décrit par Douglas Hofstadter, le jeu du nombre moyen, ou « médiocrité ». Le jeu se joue à trois personnes, chacune choisissant en secret un nombre dans un certain intervalle, et le gagnant est celui qui a choisi le nombre moyen. À chaque séquence de jeu, le gagnant moyen augmente son score de la valeur de ce nombre moyen et les scores des deux autres joueurs restent inchangés. Après cinq séquences, nous comparons les scores et, évidemment, le gagnant est celui qui a le score moyen et non pas celui qui a le plus gros score !



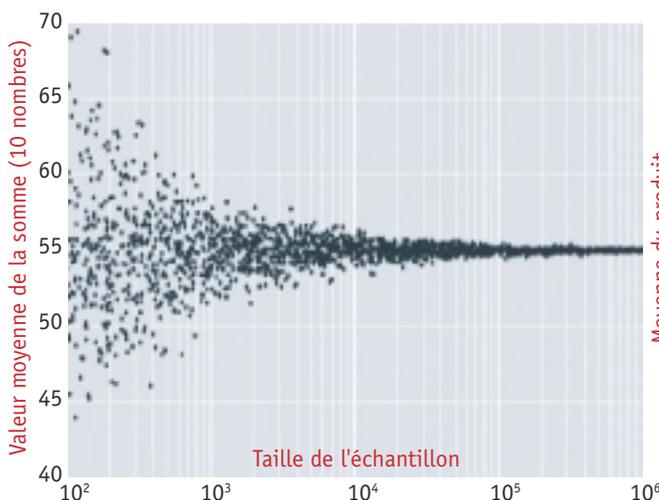
À chaque niveau d'un championnat de médiocrité, (la séquence, la série de cinq séquences), nous décernons un bonus au médiocre. Pour gagner au niveau 2 (la série de cinq séquences), il faut être un joueur médiocre au niveau du jeu simple (une séquence). S'il fallait être extrêmement médiocre dans le choix de nombres médiocres, au niveau 2, il faut être médiocrement médiocre dans le choix de nombres

médiocres. Quelle merveilleuse perversité ! C'est presque de la philosophie zen : vous perdez si vous essayez de trop gagner !

Ce jeu devient vite complexe, ne serait-ce qu'au niveau 2. « Je l'ai joué quelques fois au niveau 3, avoue Douglas Hofstadter, mais c'était trop difficile pour moi : une expérience à la fois fascinante et frustrante. » Imaginez ce que ceci implique pour la politique mondiale, si des jeux aussi simples que ceux que j'ai présentés dans cet article peuvent être aussi déconcertants !

D. Hofstadter a perfectionné son jeu pour éviter que deux joueurs ne choisissent le même nombre au niveau 1 et aussi que deux joueurs obtiennent le même score à un niveau quelconque. Sa meilleure solution est la suivante : que chaque joueur choisisse ses nombres dans un intervalle légèrement décalé par rapport aux deux autres. Plus précisément, le joueur A choisit des entiers, disons entre 1 et 5 ; le joueur B choisit des nombres de la forme $n + 1/3$, où n est un entier entre 1 et 5, et C des nombres du type $n + 2/3$. Ainsi on ne peut être coincé au niveau 0, et des règles similaires s'appliquent aux niveaux suivants.

Pour les amateurs, signalons le jeu de cartes de Greg Weidman, fondé sur le même principe sur le site <http://fringe.davesource.com/Fringe/Entertainment/Games/Indoors/Mediocrity.html>.

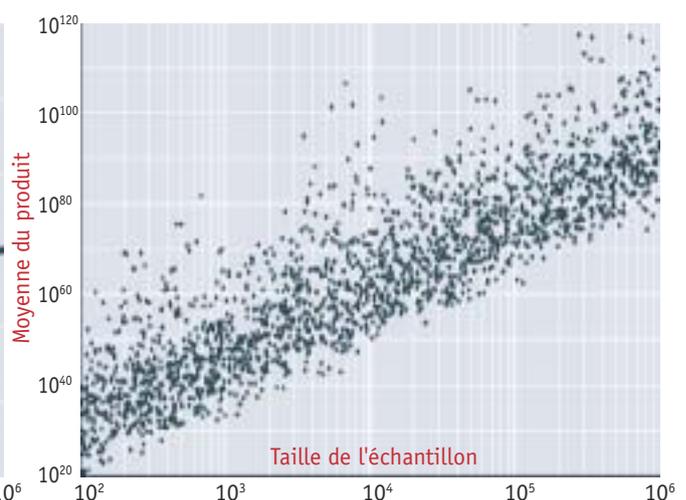


3. NOMBRES TRIANGULAIRES ET FACTORIELLES ALÉATOIRES. Le nombre $Tr(n)$, égal à la somme des n premiers entiers, vaut $n(n+1)/2$ (un tel nombre peut être redispósé en un triangle de billes). Nous examinons ici un analogue de $Tr(10)$ construit de façon aléatoire noté $Tr^*(10)$. Un tirage au sort de nombres compris entre 1 et 10 et additionnés jusqu'à ce que l'on tire 1 (arrêt du calcul) donne des nombres dont la moyenne converge vers $Tr(10)$, soit 55

sélectionnait des quartiers de roche dont la teneur en or d'un échantillon était supérieure à une valeur seuil. Or la teneur moyenne en or de la totalité des roches ainsi sélectionnées était inférieure à la valeur des échantillons : « Où est passé l'or ? » pestait le prospecteur qui soupçonnait ses employés de coulage.

Une bonne moyenne impossible

La moyenne incite à la tricherie et permet de la détecter : certains résultats de tests sont trafiqués et, en 1985, un médecin, John Cannel, a remarqué que la moyenne des résultats aux tests scolaires d'intelligence dans chacun des États des États-Unis était supérieure à la moyenne nationale !



quand la taille de l'échantillon augmente. Factorielle n , noté $n!$, est le résultat de la multiplication des n premiers entiers. L'opération de calcul de la « factoidelle » consiste à tirer au hasard un nombre, ici compris entre 1 et 10, et à multiplier par ce dernier nombre le résultat des multiplications précédentes jusqu'à ce que le nombre tiré soit égal à 1 (arrêt du calcul). La moyenne ne converge pas vers factorielle n et augmente avec la taille de l'échantillon.

En principe, plus le nombre des éléments sur lequel on calcule une moyenne est important, plus la moyenne est significative : on dit que la moyenne converge. Mais il y a des exemples où tel n'est pas le cas et où la notion de moyenne n'a pas de signification, car elle augmente régulièrement avec la taille de l'échantillon. Tel est le cas des « factoidelles ». Nous nous souvenons que la factorielle d'un nombre n , notée $n!$ est égale au produit des n premiers nombres entiers inférieurs ou égaux à n . Ainsi, factorielle(4) est égale à $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Une généralisation aléatoire due à Brian Hayes est la factoidelle. Pour la calculer, on commence par choisir au hasard un nombre entre 1 et n . Si ce nombre n'est pas

égal à 1 on retire un nombre au hasard et on le multiplie au résultat obtenu précédemment, sauf si le tirage donne 1, auquel cas le résultat de la dernière multiplication est définitif. Ainsi, factoiédelle(4) peut donner par exemple $3 \times 2 \times 2 \times 1 = 12$ ou encore $2 \times 3 \times 3 \times 4 \times 2 \times 1 = 144$.

Or si l'on calcule la moyenne de la factoiédelle(n) pour un échantillon d'une certaine taille et la moyenne de cette factoiédelle pour un échantillon de taille supérieure, la moyenne sera supérieure dans le second cas. En fait, la valeur de la moyenne de la factoiédelle de n augmente exponentiellement avec la taille de l'échantillon. Cela n'est pas étonnant, car quand le nombre des essais augmente, les tirages aléatoires font que l'on a de plus en plus de chances de trouver des grands nombres inférieurs à n .

En revanche, nous voyons que si nous calculons le correspondant « additif » de la factorielle, la valeur obtenue converge vers une valeur moyenne. Pour cela, nous fixons un nombre n et nous ajoutons les nombres entiers inférieurs à n . On obtient ainsi les nombres triangulaires $Tr(n)$. Ainsi $Tr(10) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$. Dans le processus aléatoire, nous tirons au hasard un entier inférieur à n : au lieu de le multiplier au résultat précédent, nous l'ajoutons à la somme obtenue, sauf si le résultat du tirage est 1, auquel cas le nombre obtenu est le bon. Comme indiqué sur la figure 3, la valeur du nombre triangulaire converge bien vers 55.

On frémit en pensant à toutes les erreurs statistiques faites en calculant, pensant bien faire, sur des échantillons de grande taille des moyennes obtenues, comme la factoiédelle, par multiplication.

Futurisme et paradoxe de Simpson

La probabilité d'un événement futur est souvent prise égale à la moyenne des réalisations des événements passés ; c'est le passage de la moyenne à l'espérance de succès. Ainsi, un tireur de penalties qui aura transformé 78 penalties sur 100 tirés aura une probabilité 0,78 de transformer son prochain tir. Bel et bon, mais que dire si on ne sait à peu près rien d'un joueur qui n'a tiré qu'un seul penalty dans sa carrière connue ? S'il l'a réussi, va-t-on lui assigner une probabilité de 1, égale à sa moyenne passée, ou une probabilité de 0 s'il a manqué son unique tir ? Ce serait absurde, aussi l'on pense qu'une meilleure estimation sera de pondérer son résultat par la moyenne des penalties réussis par les joueurs de son équipe, des joueurs de sa nationalité ou des joueurs de son âge, car il est probable que sa moyenne régressera vers la moyenne générale. C'est la dynamique de la régression vers la moyenne.

La difficulté consiste à déterminer l'échantillon des joueurs qui pondéreront un résultat : doit-on prendre les joueurs de son âge ou, si l'on estime qu'il est trop prudent, pondérer par la réussite des joueurs qui ont aussi une voiture rouge, témoignage, selon les assureurs, de l'audace et de la prise de risques ?

Ce qui est vrai pour le tout ne l'est pas pour les parties ! C'est ce qu'exprime le paradoxe de Simpson. Ce paradoxe, du nom de Edward Simpson qui le publia en

PETITS PROBLÈMES DE MOYENNE

Un train parcourt 600 kilomètres à la moyenne de 60 kilomètres/heure. Au retour, il parcourt la moitié du trajet à 30 kilomètres/heure. Quelle moyenne devra-t-il faire pendant la seconde moitié du trajet pour faire, au retour, la même vitesse qu'à l'aller ?

Réponse. Il devrait aller à une vitesse infinie, car pour faire la moitié du trajet retour, 300 kilomètres, à 30 kilomètres/heure, il aura déjà mis dix heures, la durée totale du trajet aller.

Le sultan Haroun al Rachid décide que les familles de ses sujets doivent avoir des enfants jusqu'à ce qu'elles aient un garçon. À chaque naissance, la probabilité d'avoir un garçon est égale à 1/2. Quel sera le nombre d'enfants moyen de chaque famille ?

Réponse. S'il naît en moyenne autant de garçons que de filles, il y aura en moyenne dans les familles autant de garçons que de filles. Comme il y a un garçon dans chaque famille, il y aura en moyenne une fille, donc, en moyenne, deux enfants par famille.

Vous êtes devant trois portes fermées. Derrière l'une d'elles il y a un trésor. Vous vous plantez devant l'une d'elles, et le maître du jeu ouvre une des deux autres portes derrière laquelle il n'y a pas de trésor. En moyenne, gagnerez-vous plus en changeant de porte qu'en ouvrant celle qui est devant vous ?

Réponse. Oui, vous avez deux chances sur trois de trouver le trésor en changeant de porte et une chance sur trois si vous ne changez pas de porte : il faut toujours tirer parti de l'information qui vous est donnée (l'ouverture de la porte derrière laquelle il n'y a rien).

Un homme veut aller rendre visite à une de ses deux maîtresses qu'il aime également. L'une habite près de la station Bastille, l'autre près de la station Georges V. À la station Châtelet, il prend le premier métro qui passe, dans un sens ou dans l'autre. Il passe un métro toutes les dix minutes allant dans chaque direction. Pourtant il va neuf fois plus souvent vers Bastille que vers Georges V. Comment cela est-il possible ?

Réponse. Les trains pour Bastille passent à 09, 19, 29, 39, 49, 59. Les trains pour Georges V passent une minute après ceux qui vont à Bastille. Si on arrive au hasard à la gare, il y aura neuf fois plus de chances que l'on tombe dans l'intervalle où le premier train sera pour Bastille.

Pourquoi lorsque l'on calcule le nombre moyen d'enfants par famille, la moyenne diffère-t-elle selon que l'on interroge les enfants ou les couples mariés ?

Réponse. Les couples mariés qui n'ont pas d'enfants diminuent la moyenne. Quand on interroge les enfants, on ne prend en compte que les couples qui ont des enfants. Cette erreur d'échantillonnage est commune en statistique.

Pour parcourir une distance de 500 km à l'aller et 500 km au retour vous faites, dans un premier voyage, 100 km/h de moyenne. Lors d'un second voyage aller-retour, vous faites 120 km/h à l'aller et 80 km/h au retour. Mettez-vous le même temps ?

Réponse. Non, faites le calcul : le temps de l'aller-retour est de 10 heures dans le premier voyage et de 10 heures 25 minutes dans le second. Mathématiquement, cela est dû au fait que les vitesses divisent les distances : on ne peut pas les additionner. Il vaut mieux rouler régulièrement. De surcroît la dépense d'énergie varie comme le carré de la vitesse, et vous dépenserez plus d'énergie dans le second cas.

HISTOIRES DE MOYENNE DE TRAINS

Un train parcourt la distance D en un temps T . Peut-être s'arrête-t-il dans des gares, peut-être fait-il des marches arrière... On fait abstraction de tout cela en disant que sa vitesse moyenne est $V = D/T$.

Il est clair que le mouvement du train est continu ainsi que sa vitesse (on voit mal comment elle pourrait sauter d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires).

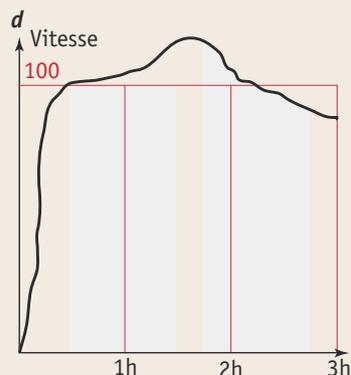
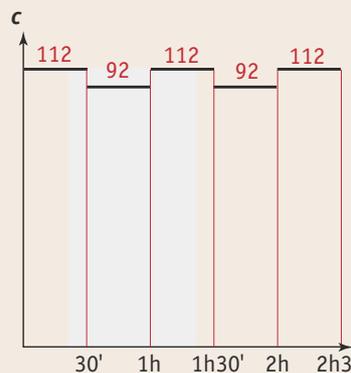
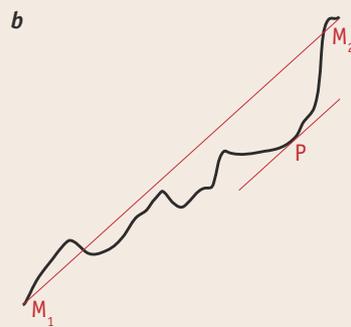
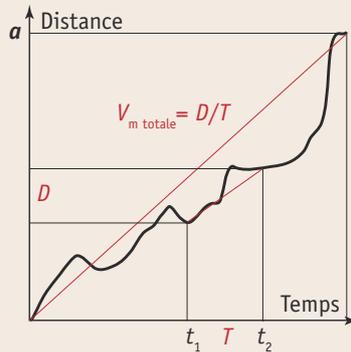
On représente (a) ce mouvement par un graphique donnant à tout instant t (porté en abscisse) la distance d (portée en ordonnée) parcourue depuis le départ du train. On obtient ainsi une courbe continue. La vitesse à un instant donné est la pente de la tangente à la courbe à cet instant. La vitesse moyenne entre deux instants t_1 et t_2 est donnée par la pente de la corde joignant les deux points d'abscisses t_1 et t_2 .

Un théorème bien connu, dit théorème des accroissements finis, assure que si l'on trace une corde joignant deux points M_1 et M_2 d'une courbe continue et dérivable (b), alors il existe un point de la courbe entre M_1 et M_2 où la tangente est parallèle à la corde. Dans le cas présent, en prenant pour instant t_1 et t_2 les instants 0 et T , on voit qu'il existe au moins un point où la vitesse du train est exactement V , sa vitesse moyenne.

Un voyageur dans le train a des difficultés à mesurer la vitesse instantanée. Tout au plus, peut-il mesurer une vitesse moyenne sur un court trajet ou dans un court laps de temps en comparant le temps mis entre deux bornes. En supposant qu'il puisse mesurer, peut-être en enrôlant d'autres voyageurs, la vitesse moyenne sur de courts laps de temps commençant à différents instants, y a-t-il un moment où il mesurera exactement la vitesse moyenne du train ?

Curieusement la réponse est non. En effet, le problème est différent de celui que résout le théorème des accroissements finis. Il s'agit cette fois de savoir si on peut placer sur la courbe donnant le mouvement du train, une corde de pente donnée (la vitesse moyenne sur tout le trajet) dont les extrémités ont des abscisses séparées d'une quantité donnée.

Prenons un exemple drastique (c) pour comprendre ce qui se passe : supposons que le train fasse du 100 de moyenne sur un parcours de 250 km ; il mettra alors 2 h 30 min sur ce trajet. Supposons qu'il ait une vitesse de 92 km/h la première demi-heure, de 112 la deuxième, de 92 la 3^e, de 112 la 4^e et enfin de 92 la 5^e demi-heure. Alors sur chaque intervalle d'une heure de trajet, le train parcourt $46 + 56 = 102$ km, et ce quel que soit l'instant de début de la mesure du moment que cette mesure est prise pendant le trajet. En effet, imaginons que l'on commence la mesure au bout de 45 minutes. Pendant 15 minutes, le train roule à 92 km/h et il parcourt donc $92/4 = 23$ km. Puis



pendant la demi-heure suivante, roulant alors à 112 km/h, il parcourt $112/2 = 56$ km et, enfin, pendant le dernier quart d'heure il parcourt à nouveau 23 km. En tout, il a bien parcouru 102 km. Ce train roule plus vite que sa vitesse moyenne ! Tout au moins sur tout intervalle d'une heure choisit pendant le trajet. Situation paradoxale !

Le train roule très lentement en début et en fin de parcours. Or on ne peut pas recouvrir le temps de parcours (2,5 heures) par une juxtaposition d'intervalles d'une heure. Il restera toujours une demi-heure, à répartir entre le début et la fin du trajet, mais peu importe : pendant cette demi-heure le train ne roulera qu'à une vitesse moyenne de 92 km/h, ce qui fera baisser la moyenne de 102 réalisée pendant les heures entières. Le train roule bien à la vitesse moyenne de 100 km/h, et c'est heureux pour la logique !

En choisissant les vitesses 108, 88, 108, 88, 108, le lecteur vérifiera facilement que ce train roule plus lentement que sa vitesse moyenne. Pour faciliter les calculs, j'ai choisi des vitesses constantes sur chaque demi-heure, ce qui n'est pas plausible physiquement. Mais en fait cela n'ôte rien au résultat, sauf qu'il faut faire appel à un arsenal mathématique plus conséquent pour faire la démonstration.

Maintenant, si la durée du trajet est un nombre entier d'heures, ce phénomène paradoxal n'aura pas lieu (d). Supposons que le trajet dure 3 heures et que la vitesse moyenne soit de 100. Considérons alors les intervalles de 0 à 1 h, de 1 h à 2 h et de 2 h à 3 h. Peut-être que sur l'un de ces trois intervalles le train aura parcouru exactement 100 km, et nous avons cet intervalle que nous cherchions. Il est impossible que la moyenne sur chacun de ces trois intervalles soit systématiquement plus grande que 100, sinon le train aurait parcouru plus de 300 km en 3 h. De même, cette moyenne ne peut être systématiquement plus petite que 100. Il y a donc deux intervalles consécutifs où la vitesse moyenne sur l'un est supérieure à 100 km/h et inférieure sur l'autre. Soit t_0 l'instant du début du premier de ces deux intervalles ($t_0 + 1$ est alors l'instant de début du deuxième de ces intervalles de temps). Considérons alors la fonction qui, à x compris entre 0 et 1, associe la vitesse moyenne sur l'intervalle $[t_0 + x, t_0 + x + 1]$. Cette fonction passe d'une valeur inférieure à 100 à une valeur supérieure à 100 (ou le contraire) et prend donc au moins une fois la valeur 100.

À la question : « Existe-t-il un intervalle de temps de durée kT pendant lequel le train roule en moyenne à sa vitesse moyenne sur tout le trajet ? », nous pouvons répondre par l'affirmative si kT divise exactement le temps T de parcours, mais nous ne pouvons pas répondre sinon. Ainsi un train qui fait 500 km en 5 h fera sûrement 100 km pendant une heure particulière du trajet, mais en 2 h de temps rien ne dit qu'il fera 200 km, car 2 ne divise pas 5.

Jean Lefort



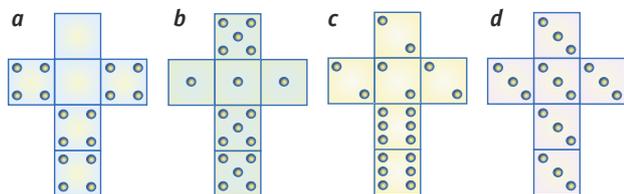
a

	% total de mâles	% de mâles < 65 ans	% de mâles > 65 ans
1970	46,4% (343/739)	59,4% (255/429)	28,4% (88/310)
1975	46,2% (238/515)	60,5% (156/258)	31,9% (82/257)
	Diminution	= Augmentation	+ Augmentation !

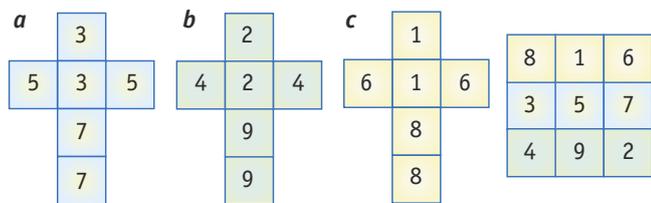
b

	% de réussite total	% gros calcul	% petit calcul
Technique 1	78% (273/350)	73% (192/263)	93% (81/87)
Technique 2	83% (289/350)	69% (55/80)	83% (234/270)
	Supérieure	= Inférieure	+ Inférieure !

4. DEUX PARADOXES DE SIMPSON : selon que l'on considère l'ensemble total étudié ou deux parties de ce même ensemble, les résultats sont inversés. En (a), la proportion de patients mâles dans un hôpital est inversée lorsque l'on calcule selon les tranches d'âge. En (b), la comparaison de deux techniques pour l'ablation de calculs rénaux donne des résultats inversés quand on prend en compte la taille des calculs.



5. LES QUATRE DÉS NON TRANSITIFS : vous laissez votre adversaire choisir un dé et vous choisissez le dé suivant sur la ligne (s'il choisit le dé d vous prenez le dé a), puis vous lancez les dés et vous gagnerez en moyenne deux fois sur trois.



6. AUTRES ENSEMBLES DE DÉS NON TRANSITIFS : chacun des dés est battu, en moyenne, deux fois sur trois par le dé situé à sa droite : le dé b bat le dé a, le dé c bat le dé b et, plus étonnant, le dé a bat le dé c.

1951, avait été découvert auparavant par le statisticien George Yule (1871-1951). Donnons-en un exemple, celui de l'hôpital psychiatrique où la proportion de patients mâles semble diminuer légèrement entre 1970 et 1975 ; toutefois, lorsque l'on sépare les patients mâles par classe d'âge (moins ou plus de 65 ans), le phénomène s'inverse (voir la figure 4a).

Le renversement de l'inégalité, qui conduit au paradoxe, se produit à cause de deux effets concurrents : la variable supplémentaire (ici l'âge) a un impact significatif sur les rapports, et les tailles des groupes qui sont combinés quand la variable supplémentaire est ignorée sont très diffé-

rentes. Nous donnons sur la figure 4b un autre exemple de ce paradoxe sur les résultats de l'opération des calculs rénaux où l'on compare deux techniques, la technique 1 et la technique 2. La seconde technique a un meilleur pourcentage au total, mais non quand on distingue les proportions de réussites dans le cas des gros calculs et dans celui des petits calculs.

On frémit aux nombreux cas de fausses preuves d'efficacité de médicament ou de bénéfices de mesures sociales qui ont résulté de ce type de découpages.

Moyenne et transitivité

La moyenne supérieure n'est pas un gage de succès. Ainsi pour les quatre dés du jeu de Win : chacun des joueurs prend un des quatre dés et celui qui a le meilleur score gagne. Vous avez le choix de prendre un dé en premier ou en second et, le cas est rare, il vaut mieux ici choisir en second.

Les figures 5 et 6 expliquent le choix à faire et la probabilité de gagner pour tous les premiers choix. La relation est non transitive : un dé b peut, en moyenne, battre le dé a, le dé c batte en moyenne le dé b... et le dé d batte le dé a ! Et pourtant la moyenne des points du dé a est de 2,66 et la moyenne des points du dé d est supérieure, 3 !

Ce jeu de dés a été inventé par Bradley Efron, de l'Université de Stanford, aux États-Unis, pour montrer les paradoxes des probabilités : un dé supérieur en moyenne n'est pas supérieur à un autre.

Bradley Efron a inventé d'autres paires de dés, notamment la paire de dés fondés sur la propriété des carrés magiques (voir la figure 6) 3, 3, 5, 5, 7, 7 ; 2, 2, 4, 4, 9, 9 ; 1, 1, 6, 6, 8, 8. Le premier dé bat le deuxième, qui bat le troisième. Et, en moyenne, le deuxième bat le premier. Pourtant, la moyenne des chiffres de chaque dé est la même : 5. Les valeurs inscrites sont celles du plus petit carré magique 3x3 dont la somme des éléments de chaque ligne et de chaque colonne est égale à 15. Si les lignes représentent la force de chacun des joueurs d'une équipe de trois joueurs, l'équipe de chaque ligne est battue par l'équipe de la ligne précédente par deux points contre un. Les mathématiciens ont démontré que tel était le score maximal que l'on puisse obtenir avec la non-transitivité.

Ainsi la moyenne est une langue d'Ésope si facile à calculer, si difficile à interpréter. Il n'empêche, la plupart des décisions administratives et personnelles sont fondées sur le calcul d'une moyenne...

Philippe BOULANGER est conseiller scientifique de la revue *Pour la science* (philippe.boulanger@pourlascience.fr).

Bernard COHEN, *Florence Nightingale*, in *Pour la Science* n° 79, juin 1984.

Martin Gardner, *Non transitive dice and other probability paradoxes*, in *Wheels, Life and other mathematical amusements*, Freeman, 1983.

Brian HAYES, *Fat tails*, in *American Scientist*, juillet 2007.

E. SIMPSON, *The interpretation of interaction in contingency tables*, in *Journal of the Royal Statistical Society*, Ser. B, 13, pp. 238-241, 1951.

Philippe BOULANGER et Alain COHEN, *Le trésor des paradoxes*, Belin, 2007.



L'exploration d'un labyrinthe

Pierre TOUGNE

« Quand on n'a pas de tête, il faut avoir des jambes », et le parcours d'un labyrinthe peut être exténuant. Les techniques d'Ariane permettent de doser votre effort, mais il y a toujours une solution.

Le mot labyrinthe est souvent associé à l'adjectif inextricable ; paradoxalement, les lignes qui suivent vous montreront qu'au prix d'un peu de méthode, un labyrinthe n'est jamais inextricable ! On désigne par ce nom des édifices composés d'allées ou de galeries dont les innombrables ramifications mettraient le visiteur dans l'impossibilité d'en sortir.

Un des plus célèbres et le plus légendaire est certainement le labyrinthe de Crète, construit par ordre du roi Minos pour y enfermer le Minotaure. Au Moyen Âge, on trouve des dallages en méandres dans la nef des cathédrales gothiques, sur lesquels on effectuait des pèlerinages miniatures. On peut encore en voir à la cathédrale de Chartres et à la collégiale de Saint-Quentin, dont le dessin (la « lieu de Jérusalem ») est inspiré d'un croquis (voir la figure 1c) de Villard de Honnecourt, le grand architecte de cathédrales du début du XIII^e siècle. Les labyrinthes ont aussi symbolisé la difficile quête amoureuse et les tribulations des jeunes gens à la recherche de l'épousée (illustration du XVI^e siècle à côté du titre). À la Renaissance, les labyrinthes ont inspiré les dessinateurs de jardins comme celui de Chantilly (voir la figure 1e). L'art aussi s'est emparé des structures labyrinthiques utilisées comme motif de décoration, ainsi cette double couverture de cheval des Indiens d'Amérique montrée sur la figure 1d. Plus proche de nous, les catacombes, les rues de Paris, certains parkings automobiles sont de véritables labyrinthes. Supposez que vous soyez égaré, disons dans les rues de Tokyo, sans plan, incapable de lire les inscriptions et sans fil d'Ariane (plus dépourvu que Thésée dans son labyrinthe) ; que pouvez-vous faire pour retrouver votre chemin ?

Plus personnellement, ne vous est-il jamais arrivé de garer votre voiture dans un quartier inconnu puis, au moment de la reprendre, de ne plus vous souvenir dans quelle rue vous l'aviez garée ? Vous vous retrouvez dans la position du voyageur dans le labyrinthe (ici le quartier) à la recherche d'une

sortie (la voiture) et vous devez visiter tout le labyrinthe afin d'être certain de retrouver la sortie (à moins que la fourrière ne tienne le rôle du Minotaure !).

Comment vous y prendre dans cet ensemble de couloirs et de carrefours ? Un couloir a deux bouts (deux incidences), chaque bout incident à un carrefour. Un carrefour incident à un seul couloir est un cul-de-sac. La forme des couloirs et des carrefours n'a aucune importance et, par conséquent, il est commode de représenter un labyrinthe sous la forme d'un graphe plan dont les sommets sont les carrefours et les arêtes les couloirs. On suppose naturellement que si deux arêtes se coupent en dehors d'un sommet, elles correspondent à deux couloirs qui ne communiquent pas.

Concrètement, pour vous construire un labyrinthe, tracez un certain nombre (fini !) de points sur une feuille de papier blanc, puis joignez-les deux à deux, et autant de fois que vous voudrez, par un nombre quelconque de lignes droites, de telle sorte qu'aucun point du système ne reste isolé des autres. Vous réaliserez ainsi un labyrinthe (ou graphe) connexe, c'est-à-dire tel que de n'importe quel sommet (carrefour) on puisse atteindre tous les autres sommets.

Comment battre le labyrinthe

Afin de vous mettre dans la position du voyageur qui n'a pas une vue d'ensemble du labyrinthe, recouvrez le dessin d'un écran opaque percé d'un trou qui matérialise la vision limitée du voyageur. Déplacez l'écran de sorte que le trou se trouve placé sur un carrefour *A*. Effectuer une « battue » du labyrinthe (on dit aussi « battre » le labyrinthe) consiste à faire parcourir (deux fois), par le trou, tous les couloirs (arêtes) du labyrinthe, de manière continue, et de revenir ensuite au point de départ *A*. Une telle battue vous garantit que vous pouvez trouver la sortie. Pour conserver le souvenir du passage du trou sur chaque arête, tracez, sur chacune

des arêtes parcourues, un petit trait transversal à l'entrée et à la sortie du carrefour. À la fin du voyage, lorsque vous enlevez l'écran, chaque extrémité des arêtes sera marquée de deux traits, mais pas plus.

Pour comprendre la méthode d'exploration d'un labyrinthe, commençons par deux types simples de labyrinthe : le polygone et l'arbre. Le polygone (voir la figure 3a) est un labyrinthe qui comporte autant de carrefours que de couloirs, les couloirs étant disposés circulairement. Dans ce genre de labyrinthe, tout carrefour est exactement incident à deux couloirs. Pour battre ce labyrinthe, il suffit de partir du carrefour de départ en tournant dans un sens, puis, lorsqu'on arrive au point de départ, repartir dans le sens contraire. En procédant de la sorte, on aura parcouru les arêtes deux fois, donc effectué une battue du labyrinthe.

Le deuxième type de labyrinthe est l'arbre, que l'on peut définir comme un labyrinthe tel que, de chaque carrefour, on puisse atteindre n'importe quel autre carrefour, mais par un seul chemin. Une définition équivalente est : un carrefour de plus que de couloirs et pas de polygones (ce qui garantit qu'il n'existe pas plus d'un chemin entre deux carrefours). Sur un carrefour « racine » se greffe un couloir aboutissant à un carrefour qui est soit un cul-de-sac, soit la racine d'un autre arbre, comme illustré sur la figure 3b.

Explorons le labyrinthe en partant de la racine *R* et explorons le couloir *a*. Arrivés au cul-de-sac, rebroussons chemin, prenons le couloir *b*, puis les couloirs *f* et *g* : un nouveau cul-de-sac ; revenons sur nos pas pour explorer *h* et trouver encore un cul-de-sac. Retournons alors jusqu'au carrefour *T*. Là, nous nous trouvons devant cinq couloirs : le couloir dont nous venons *f*, le couloir de découverte *b* de ce carrefour (c'est-à-dire le couloir par lequel on est arrivé pour la première fois à ce carrefour) et trois couloirs inexplorés *c*, *d*, *e*. Nous ne pouvons reprendre le couloir *f*, car nous l'avons parcouru deux fois. Si nous prenons le couloir de découverte *b*, nous nous privons à jamais d'explorer les couloirs *c*, *d* et *e*, car l'absence de polygone dans l'arbre ne permet pas d'atteindre ces couloirs autrement que par le carrefour *T*. Il faut donc prendre l'un des couloirs *c*, *d* ou *e*.

Explicitons cette règle de battue : en un carrefour qui n'est pas le carrefour de départ,

1. UNIVERSALITÉ DU LABYRINTHE : (a) statère d'argent de Cnossos (450 av. J.-C.), (b) table égyptienne (II^e-III^e siècle), (c) dessin de Villard de Honnecourt (XIII^e siècle), (d) Couverture de cheval indienne, (e) Le jardin labyrinthe de Chantilly.

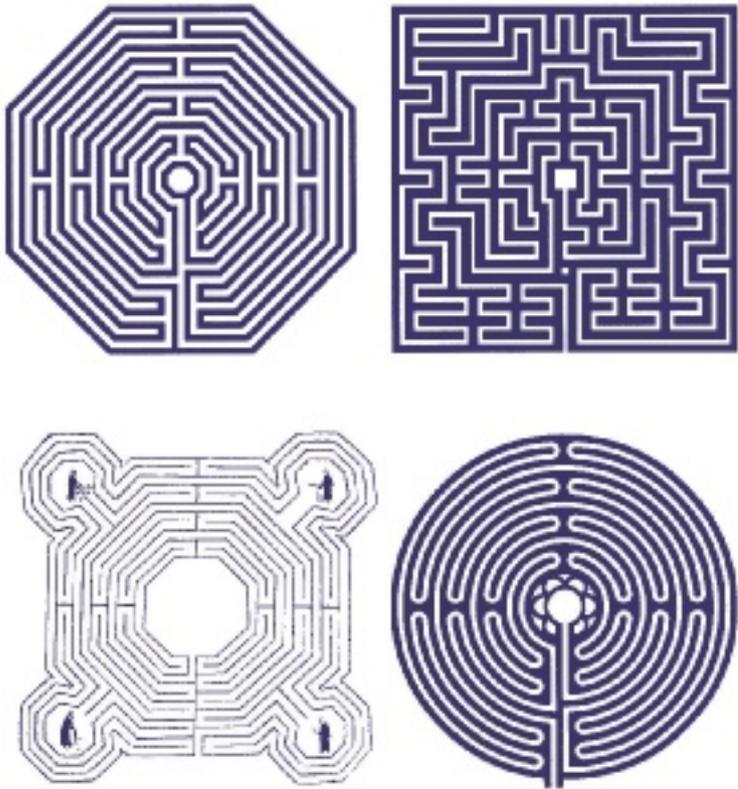


le couloir de découverte du carrefour n'est repris pour quitter le carrefour qu'en dernier recours. Remarquez que, lors de la battue du polygone, nous avons observé la même règle : nous n'avons rebroussé chemin qu'après avoir fait un tour complet.

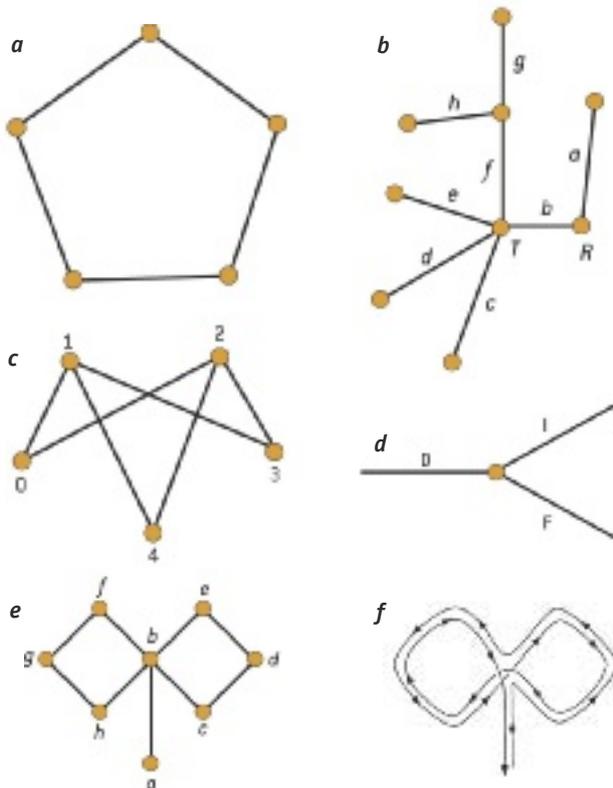
Qu'en est-il pour un labyrinthe quelconque ? On démontre qu'un graphe connexe quelconque peut être décomposé en un arbre et en des arêtes reliant deux sommets de l'arbre et faisant chacune un polygone dans l'arbre : un labyrinthe est en quelque sorte un mélange d'arbre et de polygone. Il est, dès lors, tentant de généraliser la règle que nous avons appliquée pour ceux-ci. C'est la découverte de Gaston Tarry (1843-1913) qui, en 1895, énonce qu'un voyageur est assuré de battre un labyrinthe connexe fini, c'est-à-dire prendre chaque couloir une fois dans chaque sens à partir d'un premier carrefour arbitrairement choisi, si le voyageur s'impose, en tout autre carrefour que le premier, de ne reprendre son couloir de découverte qu'en dernier recours. Le voyageur est ainsi assuré, non seulement de sortir du labyrinthe, mais de le visiter complètement.

Illustrons cette règle sur le labyrinthe très simple de la figure 3c. Les carrefours sont repérés par les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, et nous noterons le parcours d'un couloir par le chiffre du carrefour de départ et le chiffre du carrefour d'arrivée, par exemple (01). Partons du carrefour 0, prenons le couloir (01), puis, en 1, choisissons un des deux couloirs inexplorés, par exemple (13); en 3, il n'y a qu'une seule possibilité (32), en 2, nous choisissons par exemple le chemin (24), puis de 4, prenons le couloir (41). Jusqu'à maintenant, il nous a été facile d'appliquer la règle de Tarry, car il y avait, à chaque carrefour exploré, un couloir inexploré, et chaque carrefour était exploré pour la première fois. Mais revenons au carrefour 1 ; nous y sommes déjà passés, et les trois couloirs incidents ont déjà été explorés. Que faire ? Appliquons la règle de Tarry : nous ne pouvons prendre le couloir (13), car nous l'avons déjà exploré dans ce sens (ce serait une perte de temps), le couloir (10) non plus, car c'est le couloir de découverte du carrefour 1 et nous ne devons le prendre qu'en dernier recours : donc nous rebroussons chemin par le couloir (14).

Je vous laisse le soin de terminer cette battue dont le cheminement est donné par : (01) (13) (32) (24) (41) (14) (42) (20) (02) (23) (31) (10). Bien que la règle soit simple, il faut beaucoup de soin pour l'appliquer. Pour vous en convaincre, essayez-la sur un graphe plus conséquent avec



2. LES LABYRINTHES D'ÉGLISE (de haut en bas et de gauche à droite) : Amiens (1230 détruit en 1828, reconstruit à l'identique en 1894); abbatale de Saint-Bertin (XII^e siècle, détruit); Reims, cathédrale Notre-Dame (1290, détruit en 1779); Chartres, cathédrale Notre-Dame, début du XIII^e siècle.



3. DIFFÉRENTS TYPES DE LABYRINTHES et manières de les battre. Les labyrinthes sont de type polygone (a) ou arbre (b) ou, plus généralement, un mélange des deux (c).

20 carrefours, et surtout avec le cache pour ne pas voir ce que vous avez déjà fait.

Remarquez qu'à la fin de la battue, nous nous sommes retrouvés au carrefour de départ 0. Cette règle est-elle générale? Oui, comme va le montrer l'argument de parité suivant : une battue réalise en un carrefour toute incidence (bout de couloir) deux fois par définition. Le nombre de réalisations d'incidences d'une battue en un carrefour quelconque est donc pair. Supposons que le carrefour d'arrivée A ne soit pas le carrefour de départ D ; le nombre de réalisations d'incidences en A sera composé de couples d'incidences réalisées à chaque passage en A , plus l'incidence d'arrivée. Le nombre de réalisations d'incidences en A serait impair. Il y aurait contradiction. On peut faire le même raisonnement pour D , donc D et A sont confondus.

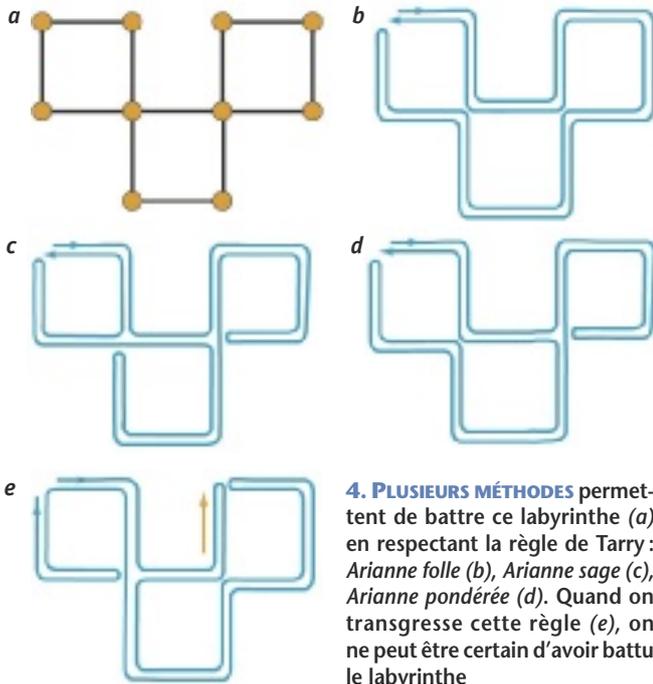
Libertés redoutées

Revenons à la règle de Tarry : si celle-ci nous dit ce qu'il ne faut pas faire, en revanche elle laisse en général beaucoup de liberté sur le choix des couloirs à prendre. Ainsi sur le schéma 3d, D désigne le couloir de découverte, I , le couloir par lequel on vient d'arriver à nouveau au carrefour et F un couloir inexploré. En observant la règle de Tarry, on peut soit rebrousser chemin par le couloir I , soit emprunter le couloir inexploré F . Il y a là deux attitudes que l'on peut systématiser tout en observant la règle de Tarry. Ces deux attitudes sont appelées par Pierre Rosenthal, spécialiste du sujet, *Ariane folle* et *Ariane sage*.

Pierre Rosenthal compare l'exploration d'un nouveau couloir à l'ouverture d'une parenthèse, et son parcours dans le sens inverse comme la fermeture de cette parenthèse. Pour *Ariane folle* comme pour *Ariane sage*, la consigne est : « Quand on ferme une parenthèse, on ferme la dernière ouverte », tout comme dans le langage quotidien. À ce sujet, Pierre Rosenthal montre qu'il existe de grandes analogies entre la théorie des labyrinthes et certaines grammaires. La tactique d'*Ariane folle* est d'aller à la découverte le plus vite possible, c'est-à-dire d'ouvrir les parenthèses (explorer un nouveau couloir) chaque fois que c'est possible.

On peut donc énoncer cette règle par : « Va, ouvre les parenthèses et, chaque fois qu'il n'y en a plus à ouvrir, ferme la dernière ouverte. » Ou, autrement dit, en reprenant la légende du fil qu'*Ariane* avait donné à *Thésée* dans le labyrinthe : « Va, débobine le fil et, quand il n'y a plus de couloir nouveau à débobiner, rembobine une longueur du dernier couloir exploré. »

Ariane sage, moins aventurière, conseille à *Thésée* de refermer les parenthèses dès que possible, tout en respectant naturellement la règle de Tarry. Elle pourrait, par conséquent, énoncer sa règle sous la forme suivante : « Va et si, en débobinant, tu tombes sur un carrefour déjà découvert, rembobine une longueur de couloir. Dans toute autre circonstance, débobine d'abord s'il y a un nouveau couloir. » Cette règle est parfois appelée algorithme de Trémaux, du nom du mathématicien qui l'avait découvert à la fin du siècle dernier. On peut enfin prendre une attitude mixte en suivant tantôt *Ariane sage*, tantôt *Ariane folle*. Ces différentes attitudes sont illustrées sur la figure 4 avec trois battues du labyrinthe (a), l'une selon *Ariane folle* (b), l'autre selon *Ariane sage* (c) et enfin selon *Ariane pondérée* (d).



4. PLUSIEURS MÉTHODES permettent de battre ce labyrinthe (a) en respectant la règle de Tarry : *Ariane folle* (b), *Ariane sage* (c), *Ariane pondérée* (d). Quand on transgresse cette règle (e), on ne peut être certain d'avoir battu le labyrinthe

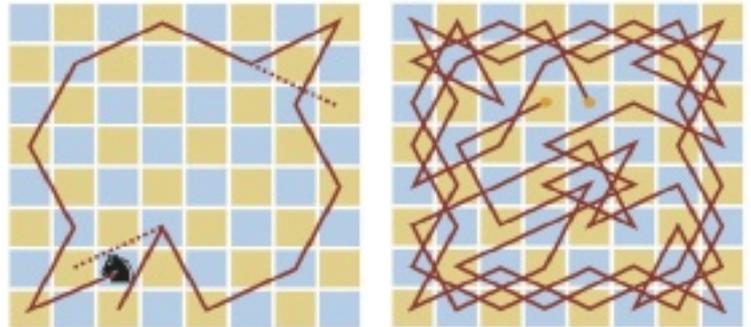
Remarquez sur ces trois battues du labyrinthe que si l'on prend au carrefour d'entrée les deux bouts du fil et que l'on tire dessus, tout le fil vient, il n'y a pas de nœuds et c'est là une propriété de ce type de battue qui suit la règle de fermeture des parenthèses.

En suivant la règle de Tarry, cette propriété n'est pas nécessairement respectée, comme le montre la battue du labyrinthe de la figure 3e, où, lorsque l'on tire les deux extrémités du fil, on a deux boucles autour de *bcd*e et *bhgf*.

Comment choisir entre les deux règles : celle d'*Ariane folle* ou celle d'*Ariane sage*? Cela dépend de ce que l'on cherche dans le labyrinthe. Si l'on cherche une sortie, la règle d'*Ariane folle* est préférable, mais si l'on veut explorer tout le labyrinthe, les deux règles semblent équivalentes. Il y a néanmoins une différence sur le plan pratique entre les deux règles : pour *Ariane sage*, il lui suffit d'inscrire deux signes en bout de couloir, un signe pour le couloir de découverte et un signe pour le couloir exploré ; en revanche, pour *Ariane folle*, la nécessité de refermer les parenthèses dans l'ordre inverse d'ouverture lorsqu'elle ne peut plus en ouvrir de nouvelles nécessite, dans la phase initiale, plus de signes. Cela a son importance, car beaucoup de problèmes mathématiques, comme la recherche d'un contre-exemple ou la réalisation d'une propriété donnée, peuvent être représentés par une battue du labyrinthe de tous les cas possibles. Si l'on effectue cette recherche par ordinateur selon une battue d'*Ariane Folle*, il faudra beaucoup de place mémoire, ce qui peut coûter cher en argent et en temps.

La règle de Tarry est-elle nécessaire ?

Non, comme le montre la figure 4e qui est une battue du labyrinthe précédent. La flèche orange indique l'endroit du parcours où l'on a transgressé la règle de Tarry. Dans ce cas précis, on sait que l'on a battu le labyrinthe parce que l'on a une vue d'ensemble de celui-ci, mais le voyageur qui n'a pas



5. MARCHÉ DE CAVALIER sur l'échiquier par l'algorithme semi-myope. Au début de l'algorithme, les traits pointillés partant d'une case représentent les autres options possibles du cavalier (à gauche). À droite, un parcours complet sur les 64 cases.

cette vue d'ensemble ne sera pas certain d'avoir battu tout le labyrinthe. C'est là le très grand intérêt de la règle de Tarry, car elle n'a recours qu'à des informations locales (seules perceptibles par le voyageur) et pourtant, en fin de parcours, le voyageur aura exploré tout le labyrinthe. C'est ce que Pierre Rosenthal appelle, de façon imagée, un algorithme myope.

D'autres problèmes de cheminement existent dans un labyrinthe, par exemple l'analogue du problème d'Euler sur les ponts de Königsberg, qui consiste à passer, une fois et une seule, par tous les couloirs. Un tel cheminement n'est possible que si le nombre de carrefours comportant un nombre impair de couloirs incidents est 0 ou 2. Ce problème ne ressort pas de la labyrintologie, car, pour le résoudre, un algorithme myope est insuffisant et il faut avoir des informations d'ensemble dont le voyageur sans cartes est dépourvu.

Le parcours du Cavalier

Il existe cependant un cas exceptionnel où une semi-myopie semble suffisante : le célèbre problème de la marche du cavalier sur l'échiquier de 64 cases. Rappelons que le problème est de faire parcourir au cavalier les 64 cases de l'échiquier une fois et une seule. On peut considérer le problème comme le cheminement dans un labyrinthe dont les cases sont les carrefours et les huit possibilités de saut du cavalier (sauf pour les cases du bord) les couloirs. Depuis sa formulation par Euler, bien des solutions ont été trouvées, mais elles ne relèvent pas d'un algorithme myope. Or, Warosdorf et, plus tard, C. Berge ont proposé l'algorithme suivant : à chaque mouvement, amener le cavalier sur la case d'où il y a le minimum de cases de sortie (non visitées). Cette règle n'est qu'une conjecture mais, expérimentalement, elle réussit toujours. Ce n'est pas tout à fait un algorithme myope, mais un algorithme presque myope, car le cavalier doit « voir » au bout du couloir. Une application de l'algorithme semi-myope du cavalier sur l'échiquier est représentée sur la figure 5.

Donc la règle d'or du voyageur égaré est de ne jamais parcourir un chemin deux fois dans le même sens, mais néanmoins de ne pas hésiter à rebrousser chemin de temps en temps.

Pierre TOUGNE se présente comme un « mathématicien amateur ».

P. ROSENTHAL, *Labyrintologie mathématique*, in *Math. Sci. Huma.* n° 33 pp 5-32, 1971.

E. LUCAS, *Les récréations mathématiques*, Tome 1, Blanchard, 1977.

Les données inutiles

Philippe BOULANGER

L'existence d'une donnée inutile dans un problème permet de le résoudre et de prolonger l'observation pour découvrir de nouvelles propriétés mathématiques.

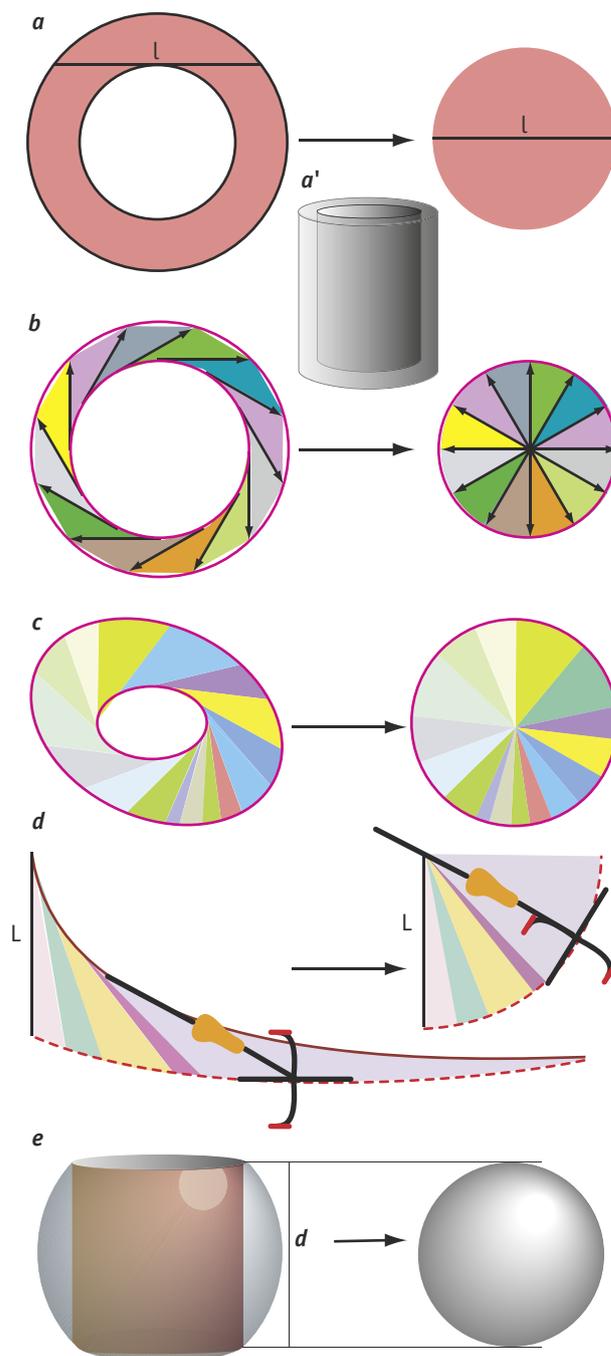
L'énoncé d'un problème peut sembler incomplet, c'est-à-dire que les données ne semblent pas suffisantes pour sa résolution. Un exemple frappant est le calcul de l'aire d'une couronne dont on ne donne que la longueur l d'une corde tangente au cercle intérieur.

Comme on n'indique pas le rayon du cercle intérieur ni celui du cercle extérieur, on en déduit que leurs valeurs importent peu et, pour simplifier le problème, on transforme le problème posé en prenant le cercle intérieur de rayon nul. La corde devient alors le diamètre du cercle extérieur et l'aire à calculer est égale à πl^2 . Un petit calcul utilisant le théorème de Pythagore confirme ce résultat.

Confronté à une telle simplification étonnante, le mathématicien cherche à en comprendre le pourquoi.

Une raison de cette propriété fut dévoilée par le physicien Mamikon Mnatsakanian, alors qu'il était étudiant à l'Université de Erevan, en Arménie. Il montrait que l'on pouvait résoudre des problèmes de calcul intégral en construisant l'hodographe du vecteur tangent à la courbe intérieure et en calculant l'aire équivalente balayée dans le mouvement. Il montra sa puissante méthode géométrique dans le plan et dans l'espace aux mathématiciens arméniens qui la dénigrèrent sans vraiment l'analyser. M. Mnatsakanian améliora si bien sa méthode qu'elle est aujourd'hui un des éléments principaux d'un programme californien d'enseignement dénommé « L'intégration visuelle » (*Visual Calculus*). Cette méthode, évoquée sur la figure 1, s'applique également à l'aire comprise entre les deux traces des roues de

1. L'aire de la couronne entre les deux cercles concentriques (a) est égale à l'aire du disque de diamètre l , la longueur de la corde tangente au cercle intérieur. La version cylindrique est représentée en (a'). La démonstration généralisable est que l'aire balayée par une demi-corde est égale à l'aire du disque obtenu par une sorte d'hodographe : d'un point on mène les parallèles aux différentes cordes de même longueur pour donner un disque de même aire que la couronne (b). La même « monstration » s'adapte à une ellipse (c). Ainsi les traces de deux pneus d'une même bicyclette (d) définissent une aire dont la valeur est égale au secteur de cercle d'angle égal à la rotation de l'axe de la bicyclette (le rayon du cercle est égal à la distance L entre les moyeux des roues). Le volume restant dans une sphère où l'on a percé un trou de longueur d est égal au volume de la sphère de diamètre d : la donnée inutile dans ce cas est le diamètre du trou.



bicyclette : pour un circuit où la bicyclette revient à son point de départ dans la même direction, l'aire tracée est égale à l'aire du disque dont le diamètre est la distance constante entre les deux roues.

Dans l'espace, le problème analogue à celui de l'anneau consiste à déterminer le volume d'un tuyau cylindrique à parois épaisses en ne connaissant que la longueur de la corde la plus longue qu'on puisse tirer sur la surface d'une des extrémités du tube (voir la figure 1a). Cette corde détermine immédiatement l'aire de la couronne à l'extrémité du tube. En multipliant cette aire par la longueur du tuyau, on détermine aisément le volume de la couronne cylindrique.

Moins facile est le problème consistant à percer un trou cylindrique de longueur d le long du diamètre d'une sphère. La question posée par Martin Gardner est : quel est le volume qui reste ?

Il semble de prime abord impossible de déterminer ce volume sans données supplémentaires. Et pourtant on montre, sans aucun calcul, que le volume du reste de la sphère est égal au volume d'une sphère solide ayant pour diamètre la profondeur d du trou.

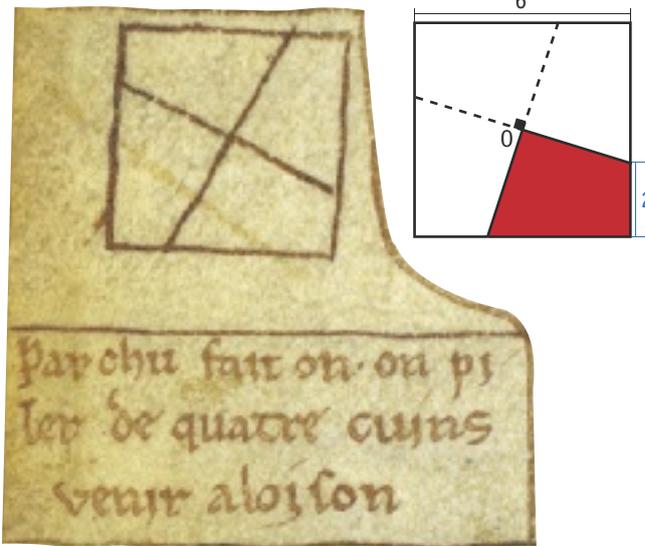
Là encore, on déduit ce résultat en faisant confiance à la personne qui pose le problème et en supposant que le problème n'est pas indéterminé. Si une solution existe, le volume de la sphère dans laquelle on a percé le trou devra être indépendant du diamètre du trou. Donc en réduisant ce diamètre à zéro, sa limite inférieure, le trou devient une ligne droite qui est alors le diamètre d'une sphère solide. La réponse est alors de $4\pi(d/2)^3/3$.

Un autre problème de type semblable donne un résultat presque paradoxal. On imagine une ficelle ceinturant exactement l'équateur de la Terre et une autre ficelle ceinturant aussi la Terre, dont la longueur par rapport à la précédente est augmentée de un mètre. À quelle distance du sol sera la seconde ficelle ? Là encore nous n'avons pas besoin de connaître le périmètre de la Terre à l'équateur pour déterminer que la différence entre les rayons des deux cercles est égal à $1/2\pi$, soit environ 16 centimètres. Étonnant !

La vitesse du courant

Un autre problème à donnée inutile a été exposé par George Gamow dans son très intéressant petit livre indiqué en bibliographie. Un jeune garçon ramait sur une rivière à contre-courant et, en passant sous un pont, il fit tomber une bouteille à moitié pleine. Il ne s'en rendit pas compte et continua à ramer pendant 20 minutes, moment où il fit instantanément demi-tour pour ramasser sa bouteille qui était alors à un kilomètre du pont. Quelle est la vitesse du courant ?

Il semble manquer une donnée, la vitesse de la barque par rapport à l'eau. En fait il n'en est rien si on raisonne correctement, c'est-à-dire dans un système de coordonnées qui se déplace avec la rivière. Dans ce système, il n'y a pas de courant et la rivière est un lac ! Si le rameur a perdu la bouteille et ramé pendant 20 minutes, alors, comme dans ce système de coordonnées il n'y a pas de courant,



2. L'aire du quadrilatère rouge est égale au quart de l'aire du carré, quelle que soit la longueur du quadrilatère. Villard de Honnecourt, qui en fit le croquis, l'avait compris.

la durée du trajet retour pour reprendre la bouteille (le rameur flegmatique rame toujours également) est aussi de 20 minutes. Donc en 40 minutes la bouteille s'est déplacée de un kilomètre par rapport au pont, ce qui implique que la vitesse du courant est de un kilomètre par 40 minutes soit 1,5 km/heure.

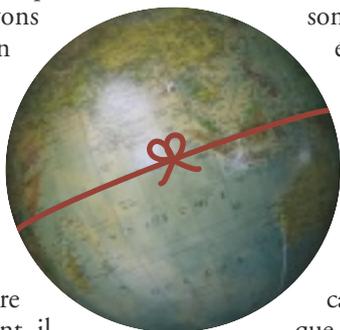
Un bon choix des coordonnées nous permet de ne pas tenir compte de la vitesse du rameur que l'on ne sait pas calculer avec ces données, mais qui ne joue aucun rôle ici.

Le croquis de Villard

L'exercice suivant révèle une complication : sur la figure 2, quelle est l'aire du quadrilatère en rouge (dont un sommet coïncide avec le centre 0 du carré) ? Deux données sont indiquées : la longueur de l'arête du carré égale à six mètres et la longueur égale à deux mètres en bleu. La solution est obtenue lentement par le théorème de Pythagore et égale à neuf mètres carrés.

En réalité la longueur égale à deux est une donnée inutile qui aiguille vers un long calcul : la symétrie d'ordre 4 du problème fait que l'aire en rouge est égale au quart de celle du carré, soit $36/4 = 9$ mètres carrés et ce, quelle que soit la longueur des côtés du quadrilatère.

Un dessin de Villard de Honnecourt (voir la figure 2), l'architecte des cathédrales du XIII^e siècle qui a laissé un carnet de croquis, illustre cette propriété. Les données inutiles sont la langue d'Ésope des mathématiques.



Philippe BOULANGER est conseiller scientifique de la revue *Pour la Science*.

Tom APOSTOL, *A Visual Approach to Calculus Problems*, in *Engineering & Science* n° 3, 2000.

G. GAMOW et M. STERN, *Jeux mathématiques*, Dunod, 1961

M. GARDNER, *Haha ou l'éclair de la compréhension mathématique*, Pour la Science, 1992.

De magnifiques démonstrations

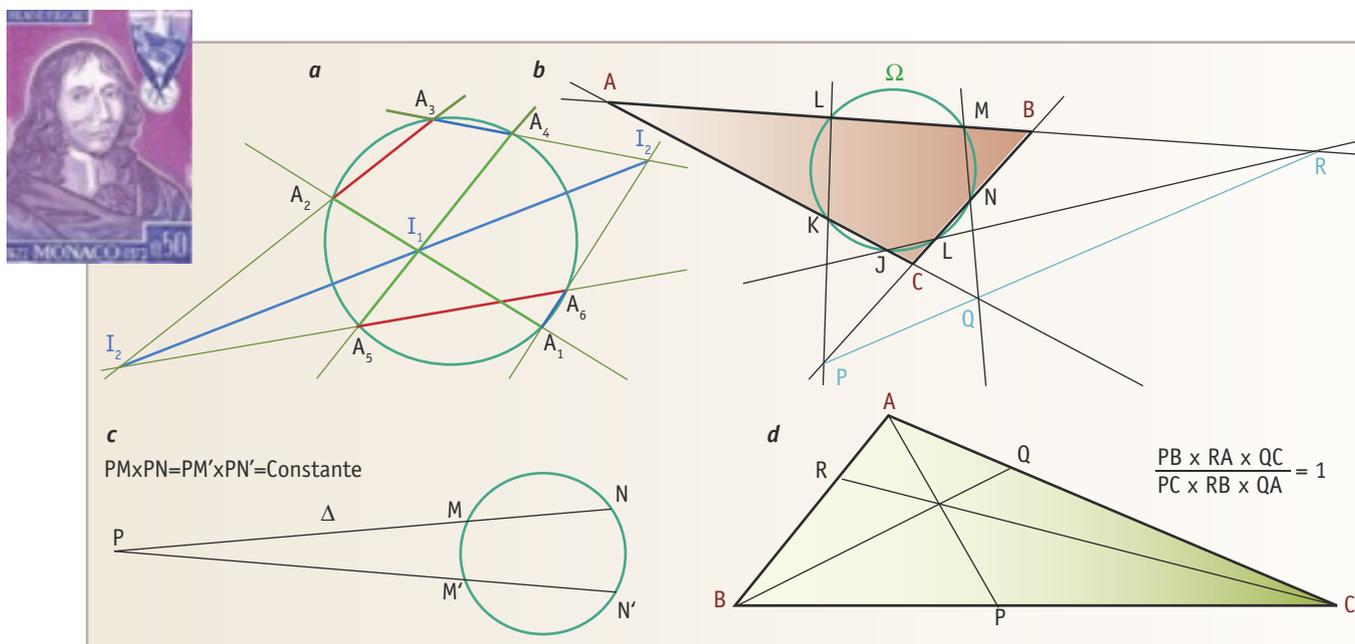
Jean LEFORT

L'inventivité de l'esprit crée des démonstrations inattendues et étonnantes dans tous les domaines des mathématiques. Elles font appel à des propriétés dont l'utilisation constitue de petits miracles logiques.

Comme toute activité humaine, les mathématiques n'échappent pas au jugement esthétique. Si, en géométrie, on peut admirer la beauté d'une figure, le profane a souvent plus de mal à comprendre la beauté d'une démonstration d'analyse, mais à mesure qu'il enrichira ses connaissances, il s'émerveillera devant la simplicité d'une méthode et l'astuce d'une autre. Bien sûr, comme les jugements dans d'autres domaines, l'esthétique en mathématiques est emprunte d'une certaine subjectivité. Entre deux belles démonstrations, tel amateur préférera la première, alors que tel autre optera pour la seconde. Question souvent de formation ou seulement d'inclination. Difficile d'être complètement impartial et de faire abstraction de son vécu.

C'est ainsi que le mathématicien hongrois Paul Erdős (prononcez « erdeuch ») parlait du *Grand Livre* dans lequel Dieu a inscrit les preuves parfaites des théorèmes mathématiques. Tout le monde n'est pas obligé de croire en un dieu, ni en un dieu qui aurait écrit toutes les mathématiques dont il ferait descendre les théorèmes sur les mathématiciens, à l'instar des feuillettes du Coran sur les hommes. Mais l'image est plaisante et montre bien la recherche permanente d'une certaine esthétique dans les démonstrations mathématiques.

Paul Erdős (1913-1996) est connu pour sa prolixité et plus comme résolveur de problèmes et de conjectures que comme théoricien. Il proposait souvent un prix symbolique (quelques dollars souvent, mais parfois beaucoup plus) à qui résoudrait tel problème, à qui infirmerait ou confirmerait telle con-



1. L'HEXAGRAMME MYSTIQUE DE PASCAL : les points de concours des côtés opposés d'un hexagone inscrit dans une conique sont alignés (a). Pascal avait démontré le théorème dans le cas où la conique est un cercle (b). La démonstration utilise la puissance d'un

point par rapport à un cercle (c) : le produit $PM \times PN$ est indépendant de la position de la sécante. Le théorème de Ménélaus (d) établit la condition $(PB \times RA \times QC) / (PC \times RB \times QA) = 1$ pour que les trois droites PA, BQ et RC soient concurrentes.

ture. Il estimait, à juste raison, qu'une démonstration sert non seulement à établir une propriété mathématique, mais aussi à l'expliquer. C'est pourquoi il insistait sur la simplicité et la clarté des démonstrations. Nous allons en voir quelques-unes.

L'hexagramme mystique

Ce théorème sur l'alignement de points d'intersection de droites est l'œuvre du génie multidisciplinaire Blaise Pascal (1623-1662). Six points $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ sur une conique forment un hexagone inscrit dans la conique dont les côtés opposés se coupent en des points alignés. Ainsi A_1A_2 et A_4A_5 se coupent en I_1 , A_2A_3 et A_5A_6 se coupent en I_2 , A_3A_4 et A_6A_1 se coupent en I_3 et les points $I_1I_2I_3$ sont alignés (voir la figure 1a).

Pascal a découvert cette propriété : il fit la démonstration dans le cas où la conique est un cercle, et il passa au cas général d'une conique par projection, mais sa démonstration dans le cas du cercle a été perdue, bien que l'on sache que Leibniz l'avait lue.

On remarque, et Pascal ne s'en était pas privé, que six points déterminent de nombreux hexagones (60 dans le cas le plus général), et chacun d'entre eux possède cette propriété : il y a donc ainsi au plus 60 droites de Pascal. L'apparition de cet alignement a quelque chose de miraculeux, et ce résultat avait frappé l'esprit tourmenté de Pascal qui avait donné le nom d'*hexagramme mystique* à la construction.

De nombreuses démonstrations de ce résultat sont belles, car elles s'appliquent directement au cas général d'une conique : elles sont souvent courtes, mais nécessitent des connaissances théoriques. En suivant Pascal et en travaillant seulement sur le cercle, il existe une démonstration n'utilisant que la puissance d'un point par rapport à un cercle et le théorème de Ménélaüs (du nom du mathématicien grec qui vivait à Alexandrie au I^{er} siècle). C'est celle que nous

donnons ci-après, après avoir rappelé deux théorèmes :

1) *Puissance d'un point par rapport à un cercle* : si P est un point du plan d'un cercle et D une droite passant par P et coupant le cercle en deux points M et N, alors la quantité $PM \times PN$ (en mesures algébriques) est indépendante du choix de la sécante D ; c'est la puissance de P par rapport au cercle (voir la figure 1c).

2) *Théorème de Ménélaüs* : trois points P, Q, R sont respectivement situés sur les côtés BC, CA et AB d'un triangle ABC, et PQR sont alignés si et seulement si $PB \times RA \times QC/PC \times RB \times QA$ est égal à 1. Considérons le triangle ABC formé par un côté sur deux de l'hexagone. En utilisant la puissance des sommets par rapport au cercle Ω , nous avons les trois égalités :

$$AL \times AM = AJ \times AQ; BL \times BM = BI \times BN; CI \times CN = CJ \times CK$$

En utilisant le théorème de Ménélaüs dans le triangle ABC et chacun des trois alignements que forment les autres côtés de l'hexagone avec les points P, Q, R, à savoir PKL, QMN et RIJ, il vient les trois égalités :

$$(BI/CI)(CJ/AJ)(AR/BR)=1;$$

$$(NB/NC)(QC/QA)(MA/MB)=1;$$

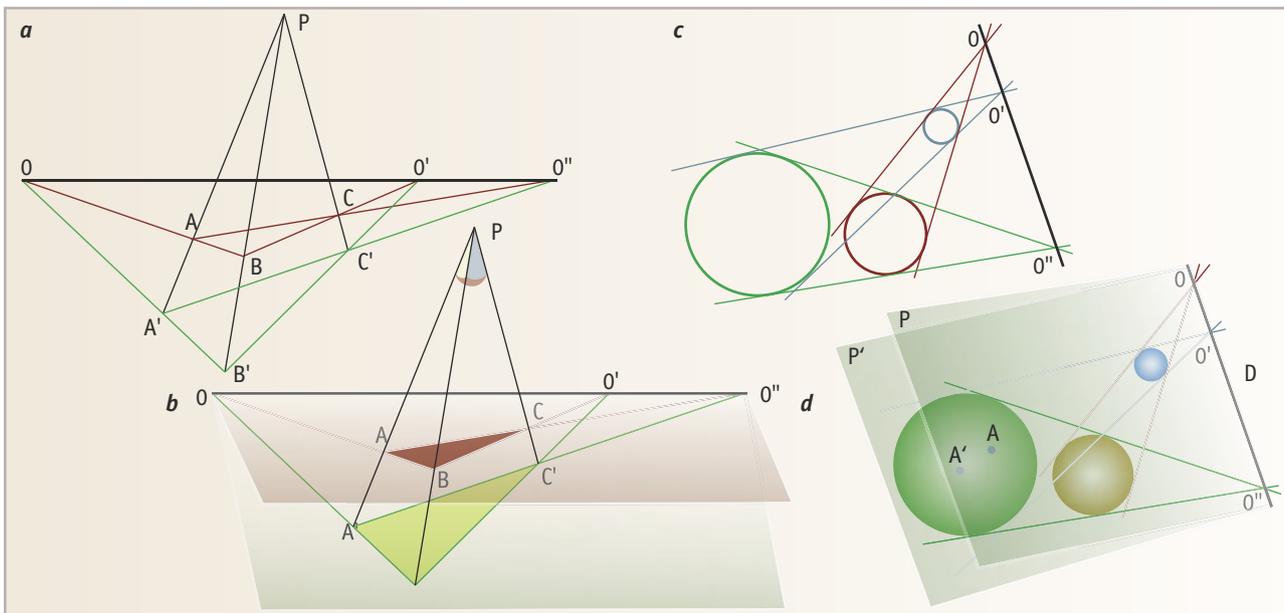
$$(PB/PC)(KC/KA)(LA/LB)=1$$

En effectuant le produit membre à membre de ces trois dernières égalités et en réarrangeant les termes, on obtient :

$$(BP/CP)(CQ/AQ)(AR/BR)[(BI/IC)(BN/CN)]$$

$$[(CJ/AJ)(CK/AK)][(AL/BL)(AM/BM)]=1$$

Dans les crochets [...], numérateurs et dénominateurs représentent les puissances des points A, B, C par rapport au cercle Ω , et on voit que le produit des trois parenthèses vaut 1. Il reste donc le produit des trois premiers termes qui vaut également 1 et, d'après la réciproque du théorème de Ménélaüs, cela signifie que P, Q, R sont alignés. Dans cet exemple, la beauté apparaît déjà dans le résultat, mais de surcroît, cette démonstration élémentaire paraît miraculeuse.

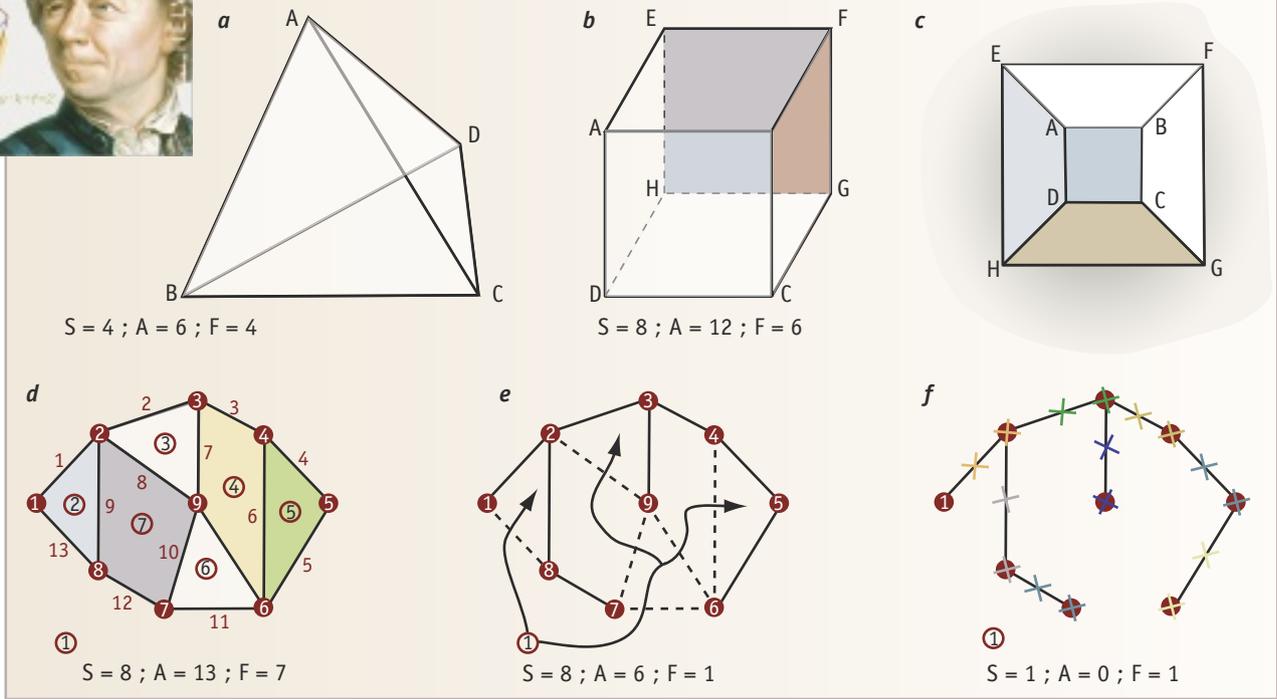


2. THÉORÈME DE DESARGUES. Pour deux triangles ABC et A'B'C' dont les droites AA', BB', CC' joignant les sommets sont concourantes, les points de concours des côtés AB et A'B', BC et B'C', CA et C'A' sont alignés. Le théorème est presque évident dans l'espace, où ABC et

A'B'C' sont dans des plans différents qui se coupent selon la droite 00'0''. De même, on démontre facilement que les points de concours des tangentes aux paires de trois cercles sont alignés quand on considère les plans tangents aux sphères qui se coupent selon une droite.



S: nombre de sommets ; A : nombre d'arêtes ; F: nombre de faces $S - A + F = 2$



3. LE THÉORÈME DÉMONTRÉ PAR EULER indique que le nombre de sommets, moins le nombre d'arêtes, plus le nombre de faces est constant pour les polyèdres comme la pyramide (a), le cube (b) et bien d'autres. Pour démontrer ce théorème, on utilise la théorie

des graphes. En projetant ce polyèdre sur un plan, on obtient un graphe (c et d). En supprimant les « cours intérieures » de la forteresse constituée par ce graphe, puis en détruisant les sommets tours et les murailles, on démontre le théorème.

Plus facile dans l'espace!

Il arrive que des théorèmes, difficiles à démontrer dans le plan, soient presque évidents quand nous raisonnons dans l'espace. Nous donnerons deux exemples, dont le célèbre théorème de Desargues.

Girard Desargues, *alias* S.G.D.L. (le Sieur Girard Desargues Lyonnais), est un géomètre et architecte français né à Lyon le 2 mars 1591 et décédé à Lyon en octobre 1661. Il est le fondateur de la géométrie projective : les caractéristiques des figures qui restent vraies quand on « projette » les figures sur un plan. Son collègue, le prestigieux Descartes, apprécie les méthodes géométriques de Desargues, mais juge le style du livret inutilement obscur et provocant, car Desargues utilise des termes géométriques peu usités et empruntés aux compagnons charpentiers du tour de France. Le théorème de Desargues met en jeu deux triangles ABC et A'B'C' dans un même plan dont les droites joignant les sommets sont concourantes : les points d'intersection des côtés du triangle, pris deux à deux, sont alignés (figure 2a).

On peut démontrer ce théorème en restant dans le plan des triangles, mais il est presque évident si l'on considère que les deux triangles ne sont plus dans un même plan, mais les sections d'un tétraèdre par deux plans (figure 2b) ; alors les points d'intersection des côtés des deux triangles sont alignés sur la droite d'intersection des deux plans contenant les triangles.

Une autre propriété concerne les trois points d'intersection des tangentes communes à des paires de cercles prises parmi trois cercles (voir la figure 2c). Ces trois points, A, B, C, sont alignés, ce qui est évident quand on considère

non plus des cercles mais des sphères dont les cercles sont les équateurs. L'intersection des deux plans tangents aux trois sphères en A et A' est une droite D où se trouvent les sommets (intersections des tangentes communes aux paires de cercles) des cônes qui enveloppent les sphères.

La formule d'Euler

En 1750, Euler énonce un résultat remarquable sur une certaine classe de polyèdres. Ce résultat lie le nombre de sommets (S), le nombre d'arêtes (A) et le nombre de faces (F) par la relation : $S - A + F = 2$ (voir la figure 3).

On vérifie ce résultat sur le cube ($S = 8, A = 12, F = 6$) et sur une pyramide à base triangulaire ($S = 4, A = 6, F = 4$). En revanche, il n'est plus valable pour les polyèdres à trous, comme un polyèdre qui épouserait la forme d'une chambre à air. Les polyèdres auxquels il s'applique sont ceux que l'on peut déformer de la manière suivante : on ôte une face, puis on étale ce qui reste sur le plan de façon que les faces (ou les arêtes) ne se croisent pas. On obtient ainsi ce qu'on appelle un graphe plan connexe. Entre les sommets d'un tel graphe il n'y a qu'une seule arête, et ces arêtes délimitent ce qu'on continue à appeler les faces du graphe. Ce graphe semble posséder une face de moins que le polyèdre dont on est parti puisqu'on lui a ôté une face avant de l'étaler. On y remédie en décidant que l'extérieur du graphe forme une face infinie (voir la figure 3c).

Décidons que ce graphe représente une place forte, les sommets étant des tours de guets, les arêtes, des murailles et les faces, des cours intérieures. Une armée ennemie assiège la place forte et la conquiert en abattant un nombre judicieux

de murailles pour prendre possession des cours. Il lui suffit très exactement d'abattre autant de murailles qu'il y a de cours ; la quantité $S - A + F$ n'a donc pas changé et il ne reste plus qu'une face, la face infinie qu'est le terrain de bataille ($F = 1$). Au terme de la lutte, il reste une succession de tours reliées par des murs. Cet ensemble peut se concevoir comme une ligne de tours et de murs sur laquelle viennent se greffer d'autres lignes au niveau de certaines tours, et il y a une tour aux extrémités de chaque ligne. Afin de faire table rase de toute fortification, tout en conservant un mémorial de la bataille, l'armée ennemie décide de garder une tour au bout d'une des lignes et, à partir de là, d'abattre la muraille qui en part et la tour suivante, et ainsi de suite. En arrivant à un embranchement où la tour vient d'être abattue deux équipes peuvent continuer le travail de la même façon. Comme on a détruit autant de murailles que de tours, la quantité $S - A + F$ n'a, là non plus, pas changé, et il reste seulement une tour (le mémorial) et une face (le terrain). Nous avons donc dès le départ $S - A + F = 2$.

Cette façon imagée de résoudre le problème n'est que la traduction de l'utilisation de la dualité. Cela revient à remplacer chaque face, y compris la face extérieure, par un sommet et à joindre par une arête deux tels sommets s'ils correspondent à des faces contiguës le long d'une arête du graphe initial. Cette démonstration par dualité est due à von Staudt qui la fit paraître en 1847 dans son livre *Geometrie der Lage*. Sans doute le choix judicieux de l'image ajoute-t-il à l'esthétique de la démonstration, à sa compréhension et à sa simplicité.

Considérons maintenant un polygone P dont les sommets sont les points à coordonnées entières du plan.

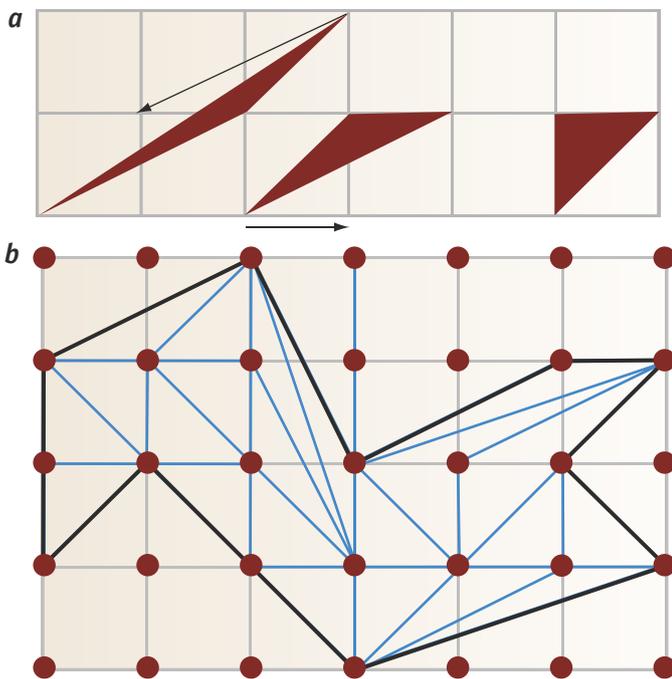
Outre les sommets, ce polygone peut contenir, soit sur les bords, soit à l'intérieur, d'autres points à coordonnées entières. Notons n_{int} le nombre de points intérieurs et n_{bord} le nombre de points sur les bords (y compris les sommets). Alors Aire (P) = $n_{\text{int}} + n_{\text{bord}}/2 - 1$.

Le théorème de Pick

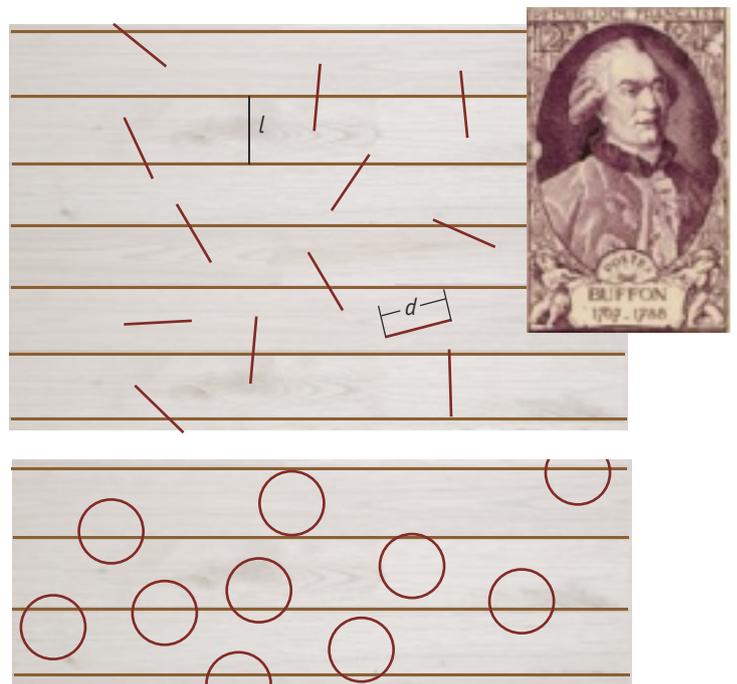
La seule difficulté de la démonstration consiste à voir qu'un triangle à sommets entiers et qui ne contient aucun autre point intérieur ou sur les bords a une aire de $1/2$. La figure 4a, où l'on déplace successivement différents sommets parallèlement au côté opposé (ce qui ne change pas l'aire), montre le résultat. Un tel triangle est dit élémentaire.

Triangulons alors le polygone P (voir la figure 4b) par des triangles élémentaires. Nous pouvons interpréter la figure comme un graphe plan et lui appliquer la formule d'Euler. Désignons par F le nombre (inconnu) de faces, dont la face extérieure ; par rapport à la formule d'Euler, il y a donc $F - 1$ triangles élémentaires et l'aire de P est $(F - 1)/2$. Chaque triangle a trois côtés ou arêtes, mais chaque arête est ainsi comptée deux fois si le triangle est intérieur et une fois si un de ses côtés appartient au bord de P : donc si a_{int} et a_{bord} sont les nombres des arêtes des côtés et des bords du polygone, nous avons l'égalité (A) : $3(F - 1) = 2a_{\text{int}} + a_{\text{bord}}$.

Or le polygone P a autant d'arêtes que de sommets sur le bord, donc $a_{\text{bord}} = n_{\text{bord}}$. Et le nombre total de sommets est $S = n_{\text{int}} + n_{\text{bord}}$. L'équation d'Euler donne une seconde équation (B) : $F = 2 + (a_{\text{int}} + a_{\text{bord}}) - (n_{\text{int}} + n_{\text{bord}})$. En éliminant a_{int} des équations (A) et (B), nous obtenons : $F = 2n_{\text{int}} + n_{\text{bord}} - 1$.



4. LE THÉORÈME DE PICK donne l'aire d'un polygone dont les sommets sont aux intersections d'un quadrillage. On démontre ce théorème en observant qu'un triangle élémentaire dont les sommets ne contiennent pas de point du quadrillage (a) a pour aire $1/2$. Ensuite on dénombre les triangles élémentaires dans le polygone (b).



5. LE COMTE DE BUFFON s'interroge sur le nombre moyen d'intersections d'une aiguille de longueur d et des droites distantes de l d'un parquet. On résout le problème élégamment en considérant que le nombre de points d'intersection moyen est proportionnel à la longueur de l'aiguille et qu'il vaut 2 pour des « cercles-aiguilles » de diamètre d .

Finalement :

$$\text{Aire}(P) = (F-1)/2 = n_{\text{int}} + n_{\text{bord}}/2 - 1.$$

Ce résultat est élégant. L'évaluation de l'aire du polygone par décompte du nombre de points intérieurs ou sur les bords est simple et permet une mesure approximative de l'aire d'une figure quelconque en encadrant cette figure par deux polygones à sommets entiers sans avoir à faire un calcul intégral ; de plus, il existe un résultat analogue en dimension 3 ou supérieure.

L'aiguille de Buffon

En 1777, le comte de Buffon, Georges Louis Leclerc (1707-1788), posa le problème suivant :

Si on laisse tomber une petite aiguille de longueur l sur des lames de parquet (figure 5) régulières de largeur d , quelle est la probabilité p que l'aiguille traverse la séparation entre deux lames ? Nous disons que l'aiguille est petite en ce sens que $l < d$.

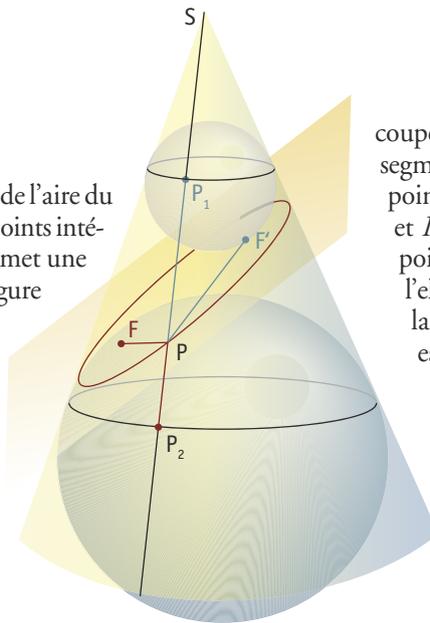
Curieusement, le résultat, $p = (2l/\pi d)$, fait intervenir le nombre π . Les preuves classiques utilisent le calcul intégral et l'apparition de π résulte de ce calcul. Il existe toutefois une preuve, due à Émile Barbier en 1860, qui n'utilise pratiquement aucun calcul et dans laquelle apparaît un cercle, lequel explique la présence de π .

Considérons deux aiguilles, l'une de longueur x (petite ou grande, peu importe), qui aura en moyenne $E(x)$ intersections, et une autre de longueur y , qui aura en moyenne $E(y)$ intersections. Si nous jetons les deux aiguilles simultanément, il y aura en moyenne $E(x) + E(y) = E(x + y)$ intersections, car, et c'est ce qui fait le charme des probabilités, la moyenne est linéaire. Cela veut dire que l'on peut mettre les deux aiguilles bout à bout en alignement ou avec un angle entre elles et que le résultat moyen sera le même. D'une façon générale, une aiguille de longueur l aura un nombre moyen d'intersections égal au produit de l par la moyenne des points d'intersection pour une aiguille de longueur unité : $l \times E(1)$, et ce quelle que soit la forme de l'aiguille. Prenons une aiguille circulaire telle que son diamètre soit justement la distance d entre deux droites. Une telle aiguille circulaire coupe toujours en deux points une des droites. Or sa longueur vaut πd et, par conséquent, $\pi d E(1) = 2$, ce qui prouve que $l \times E(1) = 2\pi d/l$. Si l est inférieur à d , c'est la probabilité d'intersection, puisqu'il ne peut y avoir que zéro ou une intersection.

Le théorème de Dandelin

Le mathématicien belge Germain Dandelin (1794-1847) inventa un très joli théorème : la section d'un cône de révolution par un plan est une ellipse dont les foyers sont les points de contact de ce plan avec des sphères qui lui sont tangentes et inscrites dans le cône (figure 6).

La démonstration est lumineuse car élémentaire. Soit P un point de l'ellipse et la droite SP passant par le sommet du cône. Les cercles de contact des sphères et du cône sont



6. LE THÉORÈME DE DANDELIN : deux sphères sont lâchées dans un cône ; le plan tangent à ces sphères coupe le cône selon une ellipse dont les foyers sont les points de contact du plan avec les sphères.

coupés par la droite SP aux points P_1 et P_2 . Les segments appartenant aux tangentes menées du point P aux deux sphères sont égaux $PP_1 = PF_1$ et $PP_2 = PF_2$. Comme $PF + PF' = P_1P_2$, les points F et F' sont les foyers de l'ellipse, car l'ellipse est le lieu géométrique des points dont la somme des distances à deux points fixes est constante.

Le problème de Sylvester

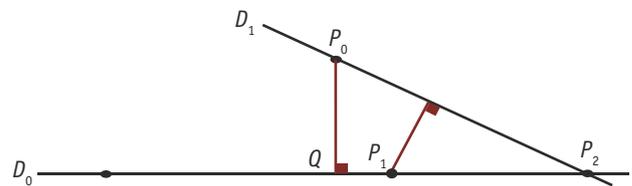
En 1893, dans une revue de problèmes mathématiques, James Sylvester (Londres 1814-1897) propose de montrer qu'il est impossible de disposer un nombre fini de points du plan de façon que toute droite passant par deux d'entre eux passe aussi par un troisième sans que ces points soient tous alignés.

On ignore si Sylvester avait une démonstration, mais la première connue fut donnée près de 40 ans plus tard par

Tibor Gallai, mais c'est L. M. Kelly qui fournit la plus belle et la plus courte preuve de ce théorème. L. M. Kelly effectue une démonstration par l'absurde, c'est-à-dire qu'il démontre que si n points ne sont pas tous alignés, il existe une droite qui en contient exactement deux, donc pas trois.

Pour cela, il construit toutes les droites possibles passant par au moins deux points de l'ensemble. Pour chaque droite D ainsi tracée et pour chaque point P qui n'est pas sur D , il considère la distance de P à D . Il choisit la droite D_0 et le point P_0 qui correspondent à la plus petite distance possible. Alors il affirme que la droite D_0 ne contient que deux points.

Ainsi il projette P_0 en Q sur D_0 , et si D_0 contenait au moins trois points, deux d'entre eux, P_1 et P_2 , seraient nécessairement du même côté par rapport à Q , et dans l'ordre $Q P_1 P_2$ (P_1 éventuellement confondu avec Q). Soit D_1 la droite $P_0 P_2$. Il est clair que la distance de P_1 à D_1 est inférieure à la distance de P_0 à D_0 , ce qui contredit le choix fait. Il n'y a donc que deux points sur D_0 .



Rationalité et irrationalité

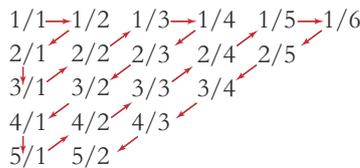
Les nombres rationnels, ceux qui s'expriment sous forme de fractions, remplissent l'ensemble des réels : entre deux nombres réels il y a toujours un nombre rationnel et entre deux rationnels il y a toujours un réel irrationnel. Or, il y a plus de nombres irrationnels que de nombres rationnels. Cela se démontre par la méthode diagonale de Cantor dont la beauté s'allie à l'utilité, puisqu'elle sert dans de nombreuses démonstrations. Démontrer qu'un nombre est irrationnel n'est pas facile, et l'irrationalité de π a occupé les mathématiciens pendant des siècles. La découverte de

l'irrationalité de $\sqrt{2}$ est attribuée à Pythagore, et il existe de nombreuses démonstrations, la plupart par l'absurde, mais celle qui a ma préférence est une démonstration géométrique (voir la figure 7). Cette démonstration s'étend facilement aux nombres de la forme \sqrt{n} . Pour d'autres nombres, comme e , la base des logarithmes népériens, c'est presque de l'arithmétique qui est utilisée, puisqu'on démontre qu'un nombre qui devrait être entier ne l'est pas.

Le procédé diagonal de Cantor

Comparer les ensembles infinis n'est pas chose aisée. Une idée est de chercher à appairer les éléments de deux ensembles. Ainsi, on peut appairer les entiers avec les fractions positives selon le principe suivant (on « regroupe » les fractions dont la somme numérateur plus dénominateur est constante) :

On compte ainsi dans l'ordre $1/1, 1/2, 2/1, 1/3, 1/4, 2/3, 3/2, 4/1, 5/1, 4/2, 3/3, 2/4, 1/5$ et, par cet appariement, il y a autant de fractions que d'entiers.



Le procédé diagonal de Cantor permet de montrer qu'il y a infiniment plus de réels que d'entiers, donc plus d'irrationnels que de rationnels (puisque les rationnels peuvent s'appairer avec les entiers). Supposons que l'on puisse numérotter les réels compris entre 0 inclus et 1 exclu. Ces réels peuvent s'écrire sous forme décimale $0, a_1 a_2 a_3 \dots$, nous aurons :

1	0, $a_1 a_2 a_3 \dots$
2	0, $b_1 b_2 b_3 \dots$
3	0, $c_1 c_2 c_3 \dots$
4	0, $d_1 d_2 d_3 \dots$
5	...

Considérons le nombre $x = 0, a_1 b_2 c_3 d_4 \dots$ et transformons-le en $x' = 0, a'_1 b'_2 c'_3 d'_4 \dots$ en remplaçant chaque décimale comprise entre 0 et 4 par 5 et celles comprises entre 5 et 9 par 0. Alors le nombre x' n'est pas dans la liste puisque sa n -ième décimale ne sera pas celle du n -ième nombre de la liste. Il est impossible d'appairer les réels avec les entiers.

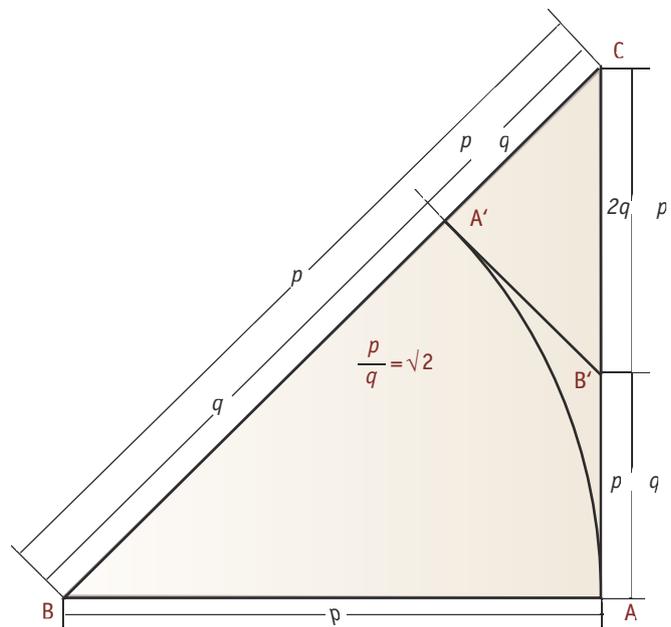
L'irrationalité de e

Une démonstration d'irrationalité utilisant une autre méthode est celle du nombre e , base des logarithmes népériens. Une des définitions possibles de ce nombre est la somme infinie :

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \dots$$

($n!$ qui se lit factorielle n , est le produit de tous les entiers inférieurs ou égaux à n). On calcule que $e \cong 2,718281828\dots$

Supposons à nouveau que e soit rationnel et égal à p/q et multiplions son égalité de définition par $q!$. Nous obtenons alors l'entier :



7. IRRATIONALITÉ DE $\sqrt{2}$. On suppose que $\sqrt{2} = p/q$, avec p et q les plus petits possibles, et $q < p < 2q$. On construit le triangle rectangle isocèle ABC dont les côtés de l'angle droit ont pour longueur q , et l'hypoténuse vaut, d'après Pythagore, $q\sqrt{2} = p$. On reporte $BA' = BA$ à l'aide d'un arc de cercle et on trace $A'B'$ tangent à cet arc et donc perpendiculaire à BC . Le triangle $A'B'C$ est un triangle rectangle isocèle (l'angle C vaut 45°), et ses côtés ont pour longueur $A'C = p - q$, donc aussi $A'B'$ qui est égal à AB (comme tangente issue de B' au cercle) et donc $CB' = q - (p - q) = 2q - p$. Le rapport de ces deux quantités $(2q - p)(p - q)$ vaut également $\sqrt{2}$. On a donc exprimé $\sqrt{2}$ sous forme fractionnaire avec des nombres strictement plus petits que les premiers, contrairement à l'hypothèse, d'où la contradiction.

$$p((q-1)!) = q! \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} + q! \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Or le premier terme de cette expression est entier puisque $n < q$, et il y a simplification totale des facteurs de $n!$ avec ceux de $q!$. Démontrons que le deuxième terme est strictement plus petit que 1.

$$q! \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{q!}{(q+1)!} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{q+2} + \frac{1}{(q+2)(q+3)} + \dots \right) \leq \frac{1}{q+1} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{q+2} + \frac{1}{(q+2)^2} + \dots \right)$$

On reconnaît dans la dernière parenthèse la somme des termes d'une suite géométrique : par conséquent, ce dernier terme vaut $(q+2)/(q+1)^2$, quantité qui est strictement inférieure à 1. Nous arrivons ainsi à la conclusion contradictoire qu'un entier $p((q-1)!)$ est égal à un non-entier. Donc l'hypothèse de départ est fautive : e n'est pas un nombre rationnel.

Ainsi, il existe des démonstrations plus belles que d'autres. Une démonstration trop calculatoire n'est pas agréable à lire et, aujourd'hui, on s'en remet dans ce cas à l'ordinateur, machine qui ignore l'esthétique et la simplicité. La force de l'homme face à l'outil est d'imaginer de meilleures solutions. Notre imagination lance des passerelles entre diverses théories, et cette ouverture débouche sur des découvertes : tel est le progrès, en mathématiques comme ailleurs.

Jean LEFORT est ancien professeur de mathématiques en classe préparatoire et ancien animateur de l'IREM de Strasbourg.

Martin AIGNER et Günter M. ZIEGLERE, *Raisonnements divins*, Springer-Verlag France, 2002.

Dissections et puzzles



Jean-Pierre FRIEDELMEYER

Les dissections révèlent des propriétés inattendues. Les recherches sur les travaux d'un mathématicien du XIX^e siècle, P. Gerwien, ont livré la clef d'une transformation d'un carré en triangle qui a fait la gloire d'une vedette anglaise des récréations mathématiques, Henry Dudeney.

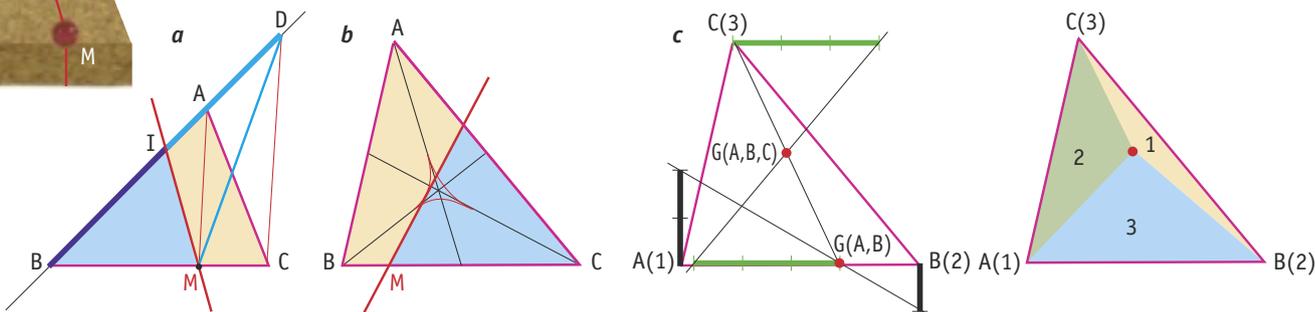
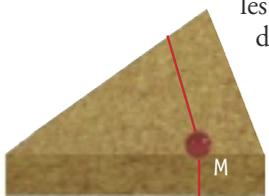
Dès les temps les plus reculés, des savants, des prêtres ou des arpenteurs se sont posé des problèmes de partage où l'on découpe des figures planes en parts égales ou inégales. Tel est sans doute une des origines de la géométrie. Le problème des six frères est décrit dans la tablette babylonienne AO 17 264 du musée du Louvre (environ 1500 avant notre ère) : *un trapèze 2,15 le côté supérieur ; 1,21 le côté inférieur ; 3,33 le front supérieur ; 51 le front inférieur : l'aîné et le second sont égaux ; le troisième et le quatrième sont égaux ; le cinquième et le sixième sont égaux. Quelles sont les limites ?*

Les données autorisent une infinité de solutions, mais la tablette en propose une seule en nombres entiers, laquelle met en jeu un outillage mathématique déjà élaboré. Pour ces problèmes et d'autres, les historiens des sciences ont montré qu'il fallait savoir partager un trapèze dont les bases mesurent a et b , selon une ligne médiane de longueur m telle que les carrés de a , m , b soient en progression arithmétique (ce que l'on traduit

aujourd'hui par la relation $m = \sqrt{[(a^2 + b^2)/2]}$, où m est la moyenne quadratique de a et b).

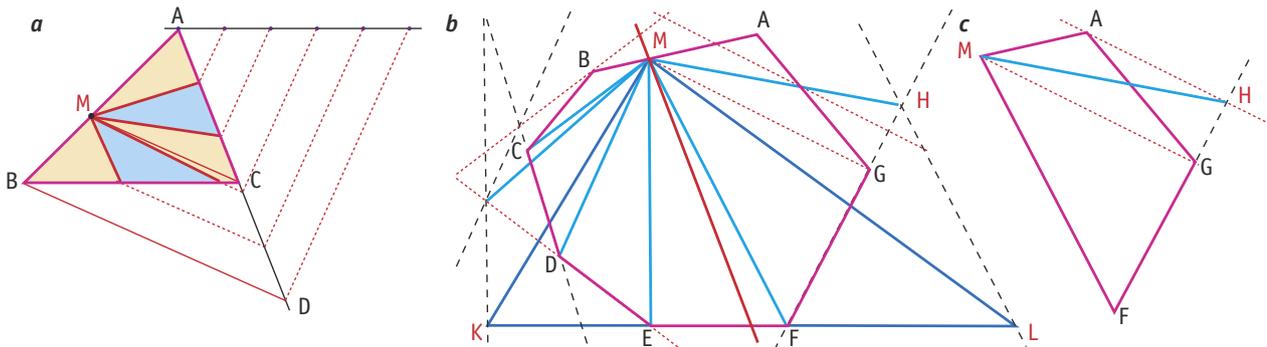
Ce problème répondait-il à la demande précise d'une famille bénéficiant d'un héritage ? Il correspond plus probablement à un exercice d'enseignement, montrant que, dès les premières civilisations, l'énigme et le jeu ont stimulé la pensée des géomètres, particulièrement dans les problèmes de découpage des figures planes. Sa caractéristique principale est cependant numérique, alors que dans les problèmes de découpage que nous allons étudier, les méthodes sont purement géométriques, sans aucun calcul.

Cette démarche est inhabituelle dans l'enseignement actuel de la géométrie, tant celui-ci est imprégné par les méthodes analytiques et calculatoires, et parce qu'on ne cherche plus à résoudre des problèmes par le seul raisonnement sur les figures. Les quatre problèmes qui suivent devraient convaincre de la puissance de ces méthodes comparées à une solution analytique dont on imagine la lourdeur et la complexité !



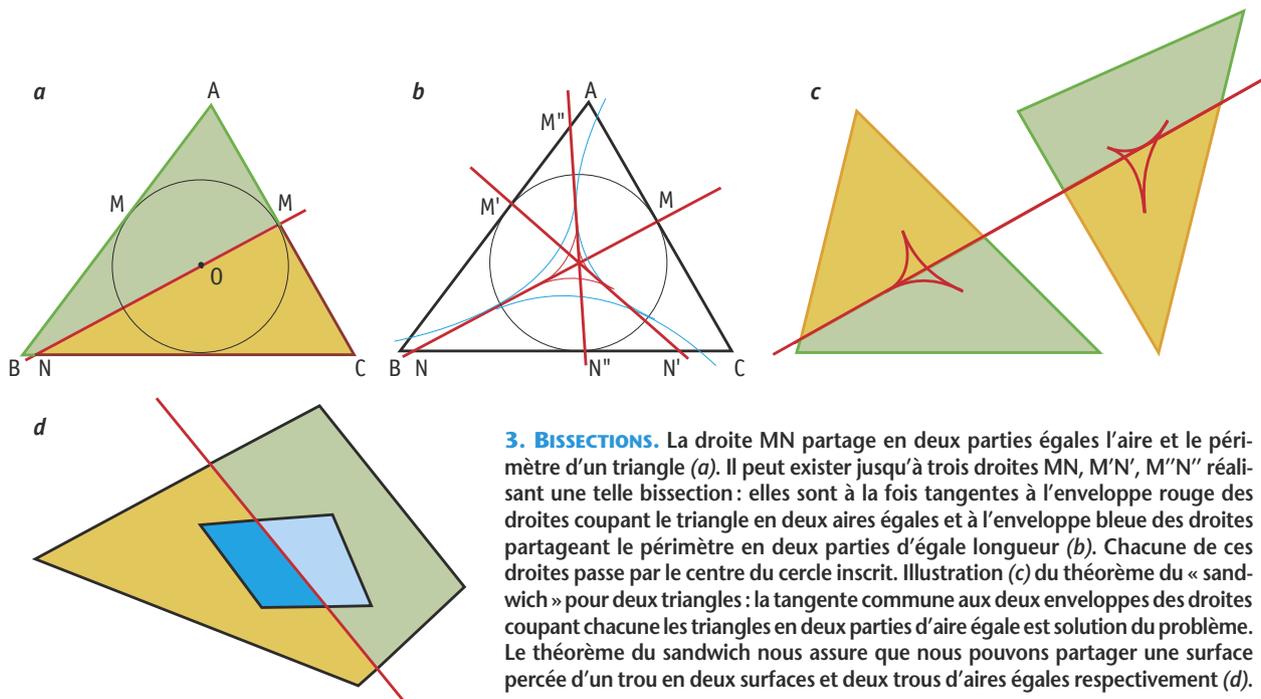
1. DÉCOUPAGE D'UN TRIANGLE en deux parties d'aire égale par une droite passant par un point M (on peut penser à un gâteau à partager par un trait de couteau passant par le centre d'une cerise périphérique coupée elle aussi en deux parties égales). La parallèle à (AM) coupe la droite (AB) en un point D . Soit I le milieu de $[BD]$. Les

triangles DMC et DAC ont même aire, donc aussi le quadrilatère $AIMC$ et le triangle IMD . La droite (IM) est donc la droite cherchée (a) . Elle enveloppe trois arcs d'hyperbole lorsque M décrit le périmètre du triangle (b) . Partage d'un triangle en trois parties d'aires dans le rapport 1,2 et 3 : le partage passe par la construction d'un barycentre (c) .



2. PARTAGES DE POLYGONES. Par une construction généralisant celle du problème 1, le triangle ABC est partagé en 5 parties égales par 4 segments issus d'un point M pris sur le périmètre du triangle (a).

Le polygone ABCDEFG (b) est transformé en un triangle MKL par des transformations explicitées sur la figure (c), où le triangle MAG est remplacé par le triangle MHG de même aire et MAGF par MHF.



3. BISSECTIONS. La droite MN partage en deux parties égales l'aire et le périmètre d'un triangle (a). Il peut exister jusqu'à trois droites MN, M'N', M''N' réalisant une telle bissection : elles sont à la fois tangentes à l'enveloppe rouge des droites coupant le triangle en deux aires égales et à l'enveloppe bleue des droites partageant le périmètre en deux parties d'égale longueur (b). Chacune de ces droites passe par le centre du cercle inscrit. Illustration (c) du théorème du « sandwich » pour deux triangles : la tangente commune aux deux enveloppes des droites coupant chacune les triangles en deux parties d'aire égale est solution du problème. Le théorème du sandwich nous assure que nous pouvons partager une surface percée d'un trou en deux surfaces et deux trous d'aires égales respectivement (d).

La cerise sur le gâteau

Problème 1. Couper un triangle ABC en deux triangles d'aires égales par une droite passant par un point M donné sur le périmètre.

La construction est indiquée sur la figure 1. Remarquons qu'un choix de I selon le rapport $k = IB/ID$ donnerait une section du triangle en aires elles-mêmes dans le rapport k . De même, la figure 2a indique le partage du triangle ABC en n parties égales par $(n - 1)$ segments issus d'un point M pris sur le périmètre du triangle (ici $n = 5$).

Dans le cas d'un polygone quelconque, la méthode consiste à construire le triangle MKL s'appuyant sur l'un des côtés du polygone donné (EF sur la figure 2b), et qui a la même aire que le polygone. Pour construire ce triangle équivalent MKL, on supprime de proche en proche les côtés du polygone, comme dans la figure 2c où le quadrilatère partiel MAGF est remplacé par le triangle MHF ; et le triangle MHF est lui-même équivalent au triangle MFL. On fait les mêmes opérations pour les autres sommets B, C, D et il suffit alors de construire la droite issue de M et passant par le milieu de [KL]. La méthode se généralise là aussi pour une section selon un rapport k .

Problème 2. Un autre problème est de trouver à l'intérieur d'un polygone convexe ABCD... un point P tel que les aires des triangles PAB, PBC, PCD... soient toutes égales (ou, plus généralement, proportionnelles à des réels positifs m, n, p, \dots).

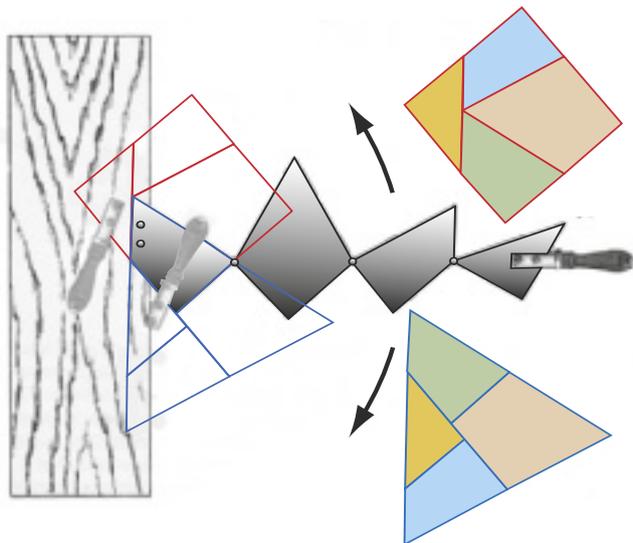
Dans le cas du triangle, le point P est le barycentre des points $\{(A, m) ; (B, n) ; (C, p)\}$. Dans le cas d'un polygone ayant plus de trois côtés, l'existence du point P n'est pas certaine, même dans des cas aussi simples que le quadrilatère convexe, lequel doit être tel que l'une des diagonales passe par le milieu de l'autre.

Problème 3. Peut-on couper par une droite en deux parties égales l'aire d'un triangle et aussi son périmètre ?

La réponse est oui, et il est remarquable qu'une droite répondant à la question passe nécessairement par le centre du cercle inscrit (figures 3a et 3b).

Problème 4. Découper plusieurs figures simultanément par une seule droite en morceaux de même aire.

Ce problème, plus difficile, a été posé dans une version tridimensionnelle par Hugo Steinhaus (1887-1972) sous la forme dénommée théorème du sandwich : trois objets de l'espace (par exemple des morceaux de pain, de jambon, de fromage) peuvent être découpés simultanément en morceaux



4. LES QUATRE PLAQUES ARTICULÉES DE DUDENEY : selon qu'on déplace la manette dans un sens ou dans l'autre, on reconstitue un triangle ou un carré de même aire.

de même volume par un unique plan. Généralement, n objets d'un espace à n dimensions peuvent être coupés simultanément et également par un hyperplan. La forme des objets n'a pas d'importance, mais le nombre d'objets à partager est exactement égal à la dimension de l'espace où ils sont situés

En dimension deux, deux crêpes placées n'importe comment sur un plan peuvent être sectionnées d'un seul coup de couteau rectiligne, chacune en deux parties égales. Prenons deux triangles d'un plan. La solution du problème 1 (voir la figure 3c) donne la construction de la droite coupant un triangle en deux parties égales et qui passe par un point M imposé du périmètre du triangle. Lorsqu'il y a deux triangles disjoints l'unique droite sectionnante sera la tangente commune aux deux ensembles d'arcs d'hyperboles constituant les enveloppes des droites sectionnantes pour chacun des triangles. Le théorème du sandwich permet aussi d'affirmer l'existence d'une droite partageant équitablement un gâteau ayant un trou (voir la figure 3d).

Ces problèmes de découpage des figures planes prennent un intérêt accru lorsque les morceaux issus du découpage permettent de reconstituer une autre figure imposée. C'est le principe à la base de la construction des puzzles. Certains remontent à l'Antiquité, d'autres à l'âge d'or des mathématiques arabes du X^e siècle, d'autres encore à la Renaissance italienne. Récemment, ils ont donné lieu à des théories mathématiques très élaborées. Examinons les questions qu'ils soulèvent et les méthodes mises en place au fil des siècles.

Le puzzle de Dudeney

Commençons par un exemple célèbre : le puzzle de Henry Dudeney (1857-1930). Pour cela, considérons les quatre plaques de formes polygonales reliées par l'un de leurs sommets (voir la figure 4).

Selon le sens par lequel on « enroule » les pièces pour les emboîter, on peut obtenir soit un carré, soit un triangle équilatéral. Comment réaliser un tel puzzle ?

Il y a une première condition à respecter : l'égalité en aire du triangle équilatéral et du carré. Il se trouve que les

mathématiciens grecs ont élaboré une construction devenue célèbre, celle d'un carré de même aire qu'un polygone donné avec comme seuls outils une règle et un compas ; c'est le fameux problème de la quadrature.

Une fois déterminé le carré égal en aire au triangle, il reste à découper l'un des deux en morceaux de façon que ces morceaux reconstituent exactement l'autre figure. Deux questions apparaissent alors : est-ce possible et comment faire ? Ces deux questions se posent pour deux figures planes quelconques, de même aire. Après avoir montré comment réaliser la quadrature d'un polygone quelconque, nous donnerons des réponses et indications sur le possible et le comment du découpage de figures planes et de leur reconstitution en d'autres figures planes.

Quadratures de polygones

Dans toute la suite, nous qualifierons d'équivalentes deux figures planes de même aire.

Une unité de mesure étant choisie, on peut évidemment calculer l'aire de la figure plane par les formules habituelles ; sa racine carrée donnera la mesure du côté du carré équivalent. Ce calcul présente un inconvénient : la mesure est approchée et relève d'une démarche calculatoire plutôt que géométrique. La procédure purement géométrique élaborée par les Grecs permet de réaliser la quadrature de n'importe quel polygone plan sans aucun calcul.

Les étapes sont exposées sur la figure 5 : 1) on partage la figure en triangles, 2) on construit un rectangle équivalent pour chaque triangle, 3) on construit pour chaque rectangle un rectangle équivalent dont l'une des dimensions est fixée, la même pour tous les rectangles, de façon qu'en les alignant côte à côte on n'ait plus qu'un seul rectangle, 4) on réalise la quadrature de ce dernier rectangle. Pour un triangle équilatéral, la même construction est plus simple.

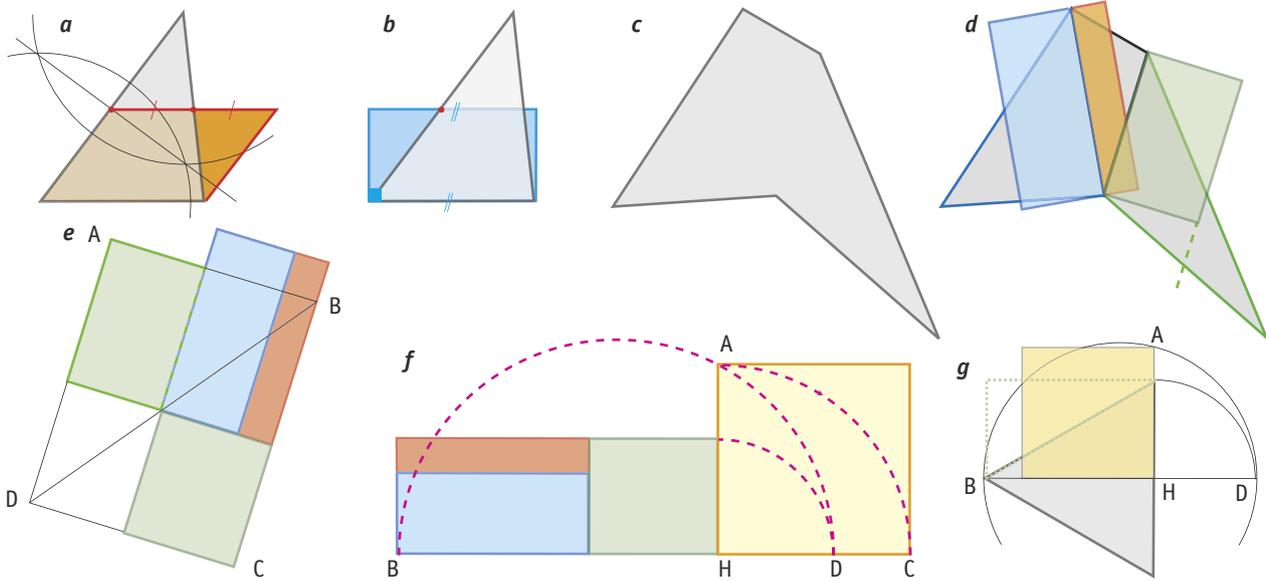
Nous pouvons généraliser le découpage du puzzle de Dudeney à n'importe quel triangle ABC acutangle (c'est-à-dire dont tous les angles sont aigus) en un rectangle équivalent (voir la figure 6), aux dimensions choisies librement (dans certaines limites). En transformant le triangle en un carré équivalent (dont on a déterminé la longueur du côté en carrant le triangle comme indiqué sur la figure 5), on aura la découpe générale d'un triangle en morceaux permettant de reconstituer un carré.

Construction de puzzles et équidécomposabilité

Reste à expliquer comment trouver de telles idées de découpage. Les méthodes sont multiples, fondées pour la plupart sur l'utilisation de répétitions, de transformations et de pavages au moyen de la figure initiale.

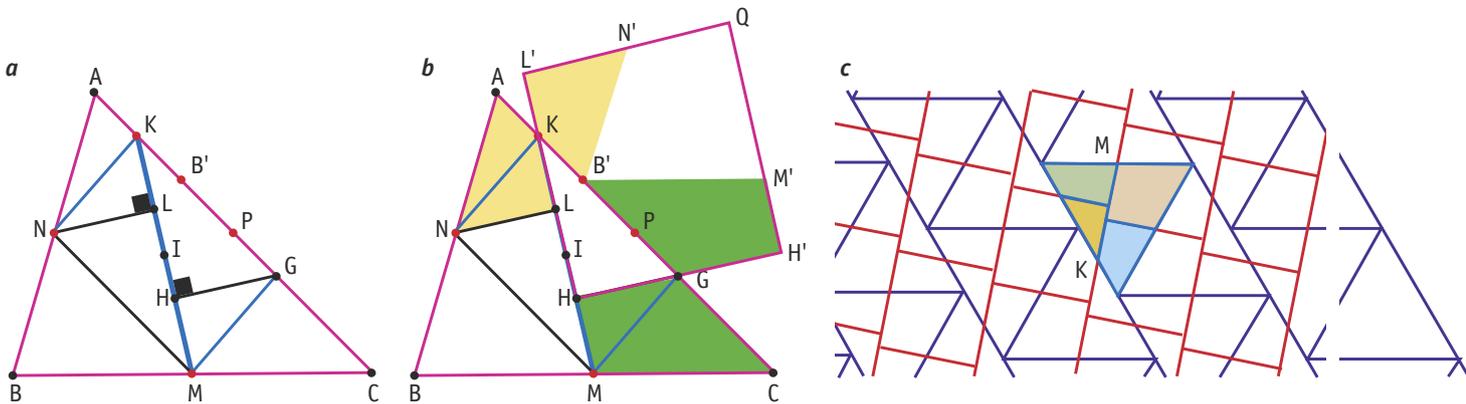
Ainsi on peut trouver le découpage correspondant au puzzle de Dudeney en superposant le pavage du plan au moyen de triangles équilatéraux et celui au moyen de carrés, cela en les disposant de façon que les côtés du carré passent par le milieu des côtés horizontaux du triangle (voir la figure 6c).

Paul-Jean Busschop (1799-1877) a obtenu un puzzle transformant un hexagone régulier en carré (voir la figure 7a). Les deux moitiés de l'hexagone sont regroupées selon un



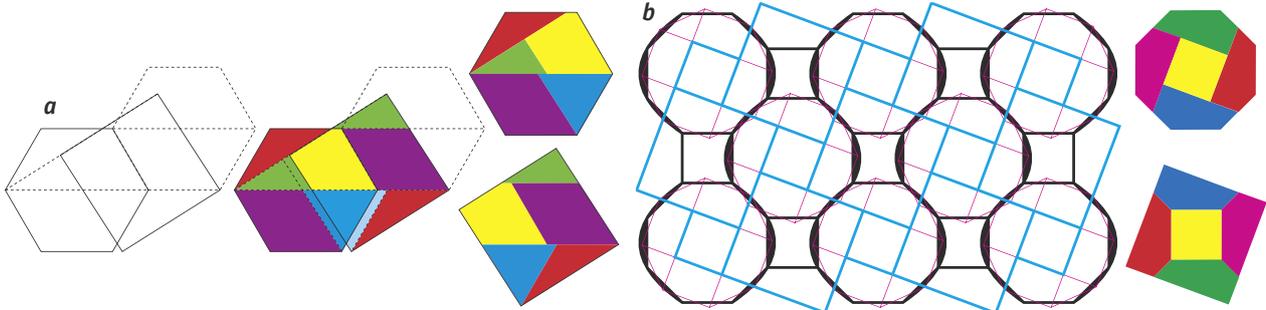
5. TRANSFORMATIONS PRÉSERVANT LES AIRES. Transformation d'un triangle en rectangle de même aire (a) et (b). Quadrature d'un polygone (c): on triangularise le polygone, puis on transforme chaque triangle en rectangle de même aire (d), ensuite on

transforme le rectangle vert en rectangle de même hauteur que la somme des hauteurs des deux autres et, enfin, on carre ce rectangle en utilisant la relation dans un triangle rectangle ABD : $AH^2 = BH \times HD$. Pour carrer un triangle rectangle, on utilise le même procédé simplifié.



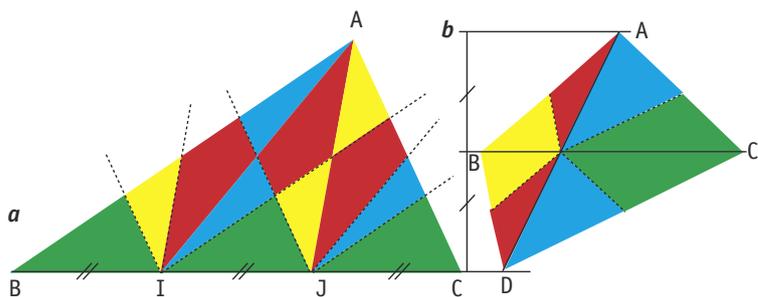
6. DÉCOUPAGE D'UN TRIANGLE ABC en un rectangle équivalent de côté choisi (a). Plaçons les milieux M, N, P des côtés du triangle. À partir du milieu M de [AC], choisissons K sur [AC] tel que MK égale le côté choisi du rectangle. La parallèle à (NK) passant par M coupe [AC] en un point G, et MGKN est un parallélogramme de centre I, milieu de [MK]. On construit les perpendiculaires à (MK) issues de N et G, qui coupent [MK] en L et H. $NL = HG$; le symétrique de A par rapport à K et le symétrique de C par rapport à G

sont confondus en un point B' (car $MN = KG = AB/2$). Il suffit de construire le polygone $KL'N'B'$ symétrique du polygone $KLNA$ par rapport à K et le polygone $GH'M'B'$ symétrique de $GHMC$ par rapport à G. Soit Q l'intersection de $(L'N')$ avec $(M'H')$. L' $HH'Q$ est un rectangle de côté L'H, égal à MK. Le polygone $N'B'M'Q$ se déduit du polygone $NBML$ par translation, et le rectangle L' $HH'Q$ est constitué des mêmes polygones que le triangle ABC. Découpage (c) correspondant au puzzle de Dudeney utilisant les propriétés de la figure a.



7. DISSECTIONS DONNANT DES PUZZLES : transformation de Busschop d'un hexagone régulier en carré (a) et transformation de Geoffrey

Thomas Bennett combinant deux pavages utilisant des associations de polygones (b).



8. LES TRIANGLES DE MÊME AIRE, ABI , AJ ET AJC , sont décomposables en de mêmes polygones vert, bleu, jaune et rouge (a). Similairement, les triangles de même base et de même hauteur sont équidécomposables en triangles (b).

parallélogramme. Le carré équivalent est construit de telle manière que les supports de ses côtés passent par les sommets situés sur la base du parallélogramme. Un très beau puzzle transformant un octogone en carré a été trouvé par Geoffrey Thomas Bennett (1868-1943) en combinant deux pavages utilisant des associations de polygones : d'une part, une combinaison d'octogones et de carrés ; d'autre part, une combinaison de deux carrés, le plus petit étant égal au carré associé à l'octogone. Leur superposition donne directement le puzzle (voir la figure 7b).

Après ces quelques exemples illustrant le « comment », voyons le « possible ».

Étant donné deux polygones, peut-on toujours découper l'un en un nombre fini de polygones tels que, rassemblés autrement, ils permettent de reconstituer l'autre polygone (on dit que les deux polygones sont équidécomposables) ? Cette question a été résolue par l'affirmative au XIX^e siècle, de façon indé-

pendante par F. Bolyai (en 1832) et par un officier allemand, P. Gerwien (en 1833). Gerwien développe un raisonnement assez élémentaire en cinq étapes, dont voici la trame :

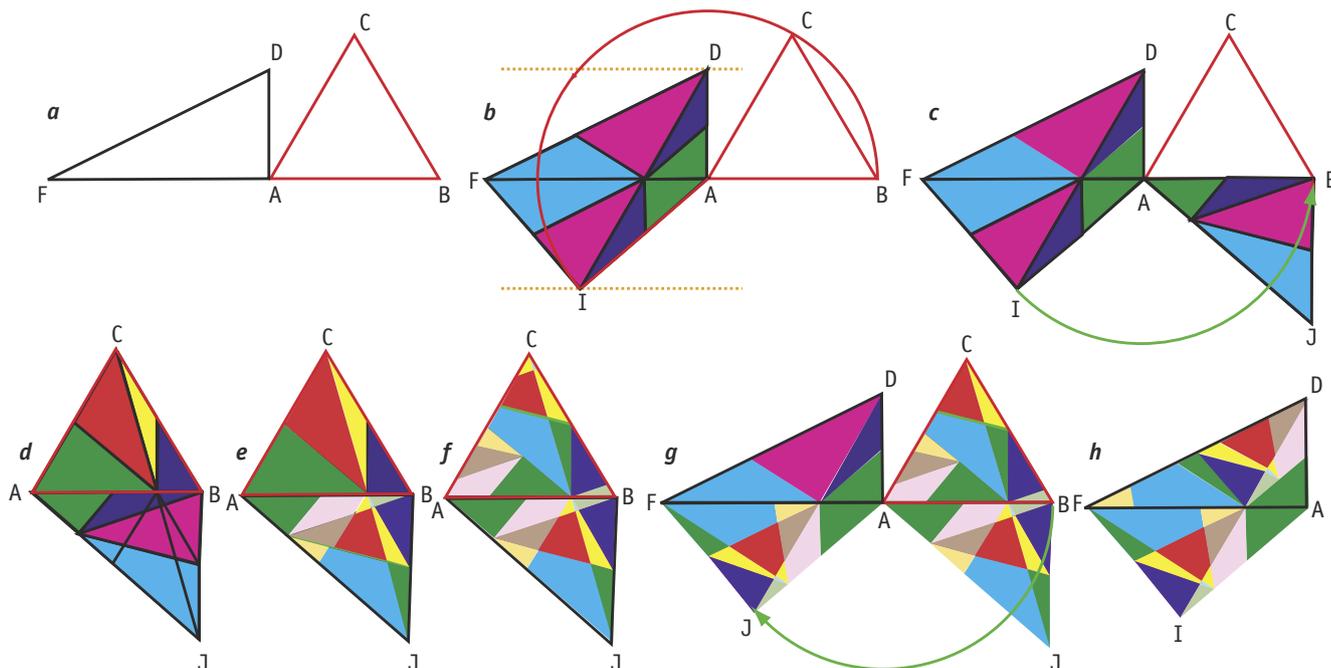
1) Des triangles en nombre quelconque, de même sommet et dont les bases sont égales et accolées sur une même droite sont simultanément équidécomposables au moyen de droites parallèles aux différents côtés menées par les sommets situés sur la base commune (voir la figure 8a).

2) Des triangles ayant une base commune et de même hauteur sont équidécomposables. La démonstration est simple dans le cas de triangles acutangles en les plaçant de part et d'autre de la base commune : il suffit de tracer, à partir de l'intersection de la diagonale avec la base, des parallèles aux côtés du triangle situé de l'autre côté (voir la figure 8b).

L'étape 3 réalise l'équidécomposabilité de deux triangles quelconques de même aire. Dans la pratique, certains morceaux n'ont pas besoin d'être distingués dans la décomposition finale et peuvent être rassemblés (voir la figure 9).

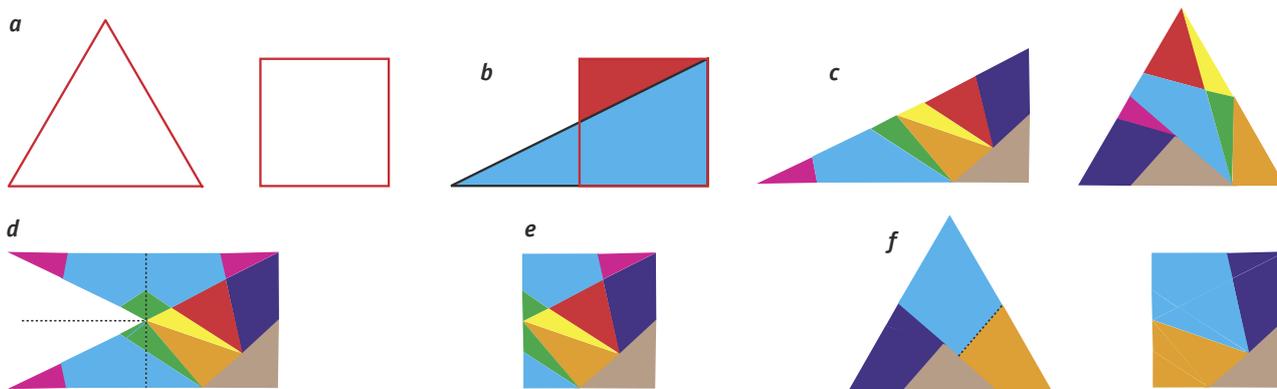
L'étape 4 réalise l'équidécomposabilité de deux polygones de même aire. L'idée consiste à réduire le nombre de côtés des polygones selon la méthode de la figure 5 du problème 1 pour aboutir à des triangles, et d'appliquer les méthodes des étapes précédentes pour les triangles ainsi obtenus. Enfin l'étape 5 traite de proche en proche le problème de l'équidécomposabilité d'un nombre quelconque de polygones de même aire.

Dans les décompositions de Gerwien, on remarquera facilement que certaines pièces sont simplement translées, alors que d'autres sont inversées selon une symétrie



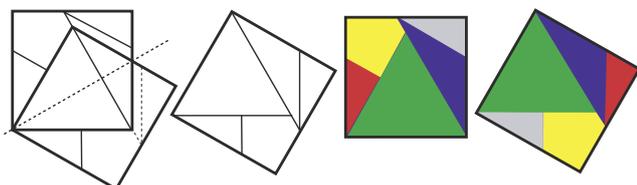
9. ÉQUIDÉCOMPOSABILITÉ DE DEUX TRIANGLES QUELCONQUES de même aire, mais qui n'ont ni même base ni même hauteur (a, les triangles ABC et ADF). On commence par construire un triangle AFI équivalent à ABC, qui a même base et même hauteur que ADE, avec AI égal à AB et que l'on dispose de part et d'autre de la base commune AE. On décompose ces deux triangles (b) selon la méthode de la figure 8. On ramène (c) le triangle AFI ainsi décomposé sur la base AB, selon le triangle AIB (possible, car AI est égal à AB). On effectue la décomposition

habituelle de la figure 8, cette fois-ci sur les triangles ABC et AJB (d). On superpose les deux décompositions (e) dans le triangle ABJ et on reporte cette décomposition sur le triangle ABC, ce qui est possible avec le parallélisme et les symétries. On ramène ensuite le triangle ABJ sur le triangle AFB (g), et l'on transporte (h) la décomposition finale sur le triangle AFD (là encore le parallélisme et les symétries autorisent ce report). Au final, les deux triangles ABC et ADF de même aire ont été décomposés avec les mêmes polygones.



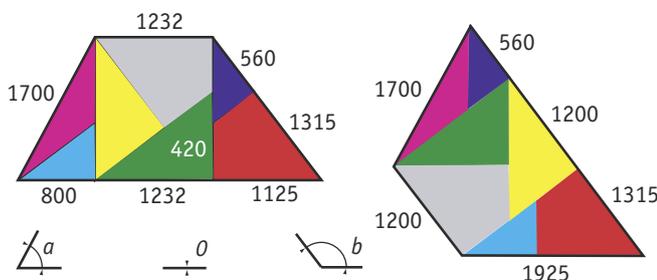
10. DÉCOUPAGE DU PUZZLE DE DUDENEY : il s'agit de découper le carré et le triangle équilatéral (a) avec les mêmes polygones. On commence par transformer le carré en triangle d'aire égale (b) pour appliquer la procédure détaillée dans la figure 9 : on obtient les décompositions (c).

On adapte la partie extérieure au carré pour revenir au carré (d et e), puis on regroupe les morceaux adjacents là où c'est possible, pour simplifier et ramener la décomposition en un nombre minimum de pièces : on arrive aux quatre pièces (f) du puzzle de Dudeney.



11. ÉQUIDÉCOMPOSABILITÉ TRANSLATIVE de deux polygones superposables : les aires et les sommes des mesures orientées des côtés sont évidemment égales.

diffère de 180 degrés. On obtient ainsi un ensemble de couples baptisé « somme des mesures orientées des côtés » et décrite par une fonction L. Pour un rectangle, la « somme des mesures orientées des côtés » est nulle, et elle est explicitée sur la figure 12 pour l'exemple du trapèze. H. Hadwiger et P. Glur démontrent alors que :



12. ÉQUIDÉCOMPOSABILITÉ DE DEUX POLYGONES de dimensions différentes mais de même aire et dont la somme des mesures orientées des côtés d'angle 0, a et b sont égales. Dans le premier trapèze, on a les sommes (1700, a) ; (3157 - 1232, 0) ; (1875, b), alors que dans le deuxième, on a (1700, a) ; (3075 - 1200, b) ; (1925, 0).

1. Deux polygones sont équidécoupables uniquement par translations et symétries centrales si et seulement si ils sont équivalents.

2. Deux polygones sont translativement équidécoupables si et seulement si ils sont équivalents et ont même somme des mesures orientées des côtés.

Cela peut se produire simplement pour deux polygones congruents (superposables), tels les deux carrés de la figure 11, ou pour des polygones formés de couples de côtés égaux et parallèles.

Cependant, les figures peuvent avoir des dimensions différentes, sous réserve de respecter l'égalité des sommes des mesures orientées des côtés. Ainsi les deux trapèzes de la figure 12, pour lesquels on a cherché des dimensions toutes entières, permettent la vérification exacte de l'égalité des fonctions L.

Ces quelques exemples de dissection des figures planes nous montrent la richesse et la variété des problèmes qu'elle pose. Ceux-ci sont loin d'être épuisés : comment trouver une décomposition en un nombre minimum de pièces ? Peut-on les adapter (et comment) aux figures limitées par des courbes ? Aux polyèdres de l'espace et, au-delà, aux espaces de dimensions quelconques ? Aux géométries non euclidiennes ? Autant de questions qui feront l'objet de nombreuses recherches et publications du XX^e siècle et d'aujourd'hui.

centrale (ou rotation d'un angle de 180 degrés). En revanche, dans les puzzles de l'hexagone en carré ou de l'octogone en carré (voir la figure 7) toutes les paires de pièces de même couleur ont exactement la même position dans le plan et se déduisent l'une de l'autre par simple translation. Les mathématiciens suisses H. Hadwiger et P. Glur se sont intéressés à la question d'une équidécoupabilité au moyen de polygones se correspondant tous par translation seule, qu'ils appellent équidécoupabilité translative.

Équidécoupabilité translative

En plus de l'aire, ils sont amenés à introduire, pour chaque côté du polygone, le couple formé par sa longueur et l'angle qu'il fait avec une direction fixe. Cet angle est mesuré de 0 à 360 degrés, en décidant de parcourir le périmètre dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. On réduit cet ensemble de couples en additionnant les longueurs qui font le même angle et en retranchant celles dont l'angle

Jean-Pierre FRIEDELMEYER est docteur en histoire des sciences. Il travaille actuellement sur l'histoire de la géométrie moderne et contemporaine avec les Archives Poincaré de Nancy.

E. FOURREY, *Curiosités géométriques*, Vuibert, Paris, 1920

G. FREDERICKSON, *Dissections : Plane & Fancy*, Cambridge University Press, 1997

H. HADWIGER, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Springer Verlag, 1957

V. BOLTJANSKII, *Hilbert's Third Problem*, John Wiley & Sons, New York 1978.

Site présentant de façon animée l'ensemble des découpages-recomposition des polygones étoilés : steiner.math.nthu.edu.tw/ne01/tjy/dissections/Dissection-ani.htm

L'espace

au secours du plan

Jean LEFORT

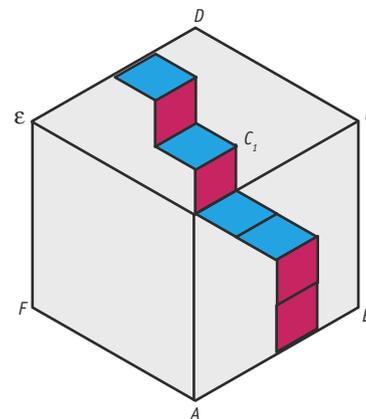
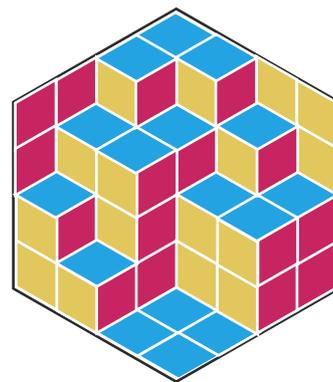
La transformation des problèmes plans en problèmes dans l'espace ouvrent de nouvelles perspectives et de nouvelles démonstrations.

Nous vivons dans un monde à trois dimensions. Quand nous faisons de la géométrie plane, nous travaillons dans un sous-espace de dimension deux. Bien évidemment, les mathématiciens ont imaginé toutes sortes de mondes à deux dimensions qui ne font pas appel à l'existence d'un monde à trois dimensions. Mais notre perception du plan est une perception globale puisque vue de la troisième dimension.

De nombreuses figures planes peuvent être interprétées comme une projection convenable d'une figure de l'espace et, dans cette optique, les démonstrations des propriétés d'une telle figure deviennent immédiates, alors qu'en restant dans le plan, les démonstrations sont assez longues, lourdes et peu évidentes. On objectera, bien sûr, que la démonstration d'une propriété d'une figure plane faisant appel à l'espace n'est pas une démonstration intrinsèque. D'un point de vue puriste, on aura tout à fait raison, mais ce point de vue est l'apanage du spécialiste et reste discutable. Nous avons vu dans *De magnifiques démonstrations* (page 48), le théorème de Desargues, évident à trois dimensions, et nous allons voir ici des exemples aussi frappants.

Les calissons d'Aix

Cette pâtisserie, spécialité de la région d'Aix-en-Provence, se présente souvent sous la forme de losanges aux sommets légèrement arrondis. Ces losanges ont la particularité d'être formés de deux triangles équilatéraux accolés par une base commune. On peut donc regrouper les calissons par six autour d'un sommet où l'angle est de 60 degrés et par trois autour d'un sommet où l'angle est de 120 degrés. Bien d'autres organisations possibles permettent de varier la présentation. Nous allons nous intéresser au cas où les calissons sont rangés dans une boîte qui est un hexagone régulier aux dimensions *ad hoc* pour pouvoir y placer un nombre entier de calissons sans laisser de vide.



La figure située à côté du titre explicite un rangement des losanges dans un hexagone. On vérifie qu'il y a autant de losanges dans la direction rouge que dans la direction orange ou la bleue.

En termes mathématiques, nous dirons que nous cherchons à paver un hexagone régulier par des losanges dont un angle vaut 60 degrés et dont le côté divise exactement le côté de l'hexagone.

Ce pavage peut s'effectuer de bien des façons et chaque losange y a l'une de trois orientations possibles représentées par la couleur des losanges. Le but est de démontrer que chaque orientation contient le même nombre de losanges.

Dans le plan, on trouve les principales étapes de cette démonstration dans *American Mathematical Monthly* de mai 1989, pages 429 à 431, article de Guy David et Carlos Tomei.

Considérons la boîte hexagonale ABCDEF de côté n calissons dans laquelle ont été rangés les calissons au nombre de $3n^2$ (il y a n^2 calissons par face). On considère des chaînes de calissons telles que deux successifs aient un côté commun parallèle à un des côtés de la boîte (toujours le même), le premier calisson étant placé le long de ce côté de la boîte.

On dénomme chaînes de type C_1 celles qui partent du côté AB de la boîte (voir la figure ci-dessus), chaînes de type C_2 celles qui partent du côté AF et chaînes de type C_3 celles qui partent du côté BC. Ces chaînes ont certaines propriétés :

- 1) Une chaîne C_1 va d'un côté au côté opposé qui lui est parallèle.
- 2) Deux chaînes de même type C_i et C'_i n'ont aucun calisson en commun.
- 3) Deux chaînes de type différent C_i et C_j , i différant bien sûr de j , ont exactement un calisson en commun.
- 4) Tous les calissons appartenant à deux chaînes de type donné C_i et C_j ont tous la même orientation (les deux directions de parallélisme définissent exactement le losange).

5) Il y a exactement n chaînes de chaque type (on ne peut placer que n calissons le long de chaque côté de la boîte).

Considérons alors les n chaînes C_1 et les n chaînes C_2 . Les calissons qui sont à l'intersection d'une chaîne C_1 et d'une chaîne C_2 sont au nombre de n^2 . Il y a donc au moins n^2 calissons qui ont l'orientation $AB - AF$. Le même raisonnement prouve qu'il y a aussi au moins n^2 calissons dans chacune des deux autres orientations. Comme le total est $3n^2$, il y a donc exactement n^2 calissons dans chaque orientation.

Pour les calissons dans l'espace, la démonstration qui suit est due à Jean Martinet. Elle est citée dans l'article d'*American Mathematical Monthly*.

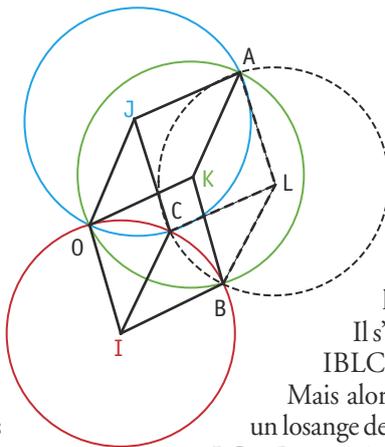
Considérons une boîte cubique d'arête de longueur n contenant n^3 petits cubes identiques d'arête 1. Tous ces petits cubes ont deux faces opposées rouges, deux autres orange et les deux dernières bleues. La boîte cubique est coloriée de la même façon. Rangeons les petits cubes à l'intérieur de la boîte de façon que les faces parallèles du grand cube et des petits cubes soient toujours de la même couleur.

Puis nous enlevons des cubes de façon à obtenir la configuration donnée. Pour voir que le nombre de losanges est le même dans chaque direction, nous projetons l'ensemble des cubes sur l'un des plans correspondant à une face du grand cube. Il est clair que l'on verra alors n^2 petits carrés de la même couleur.

En toute rigueur, il faudrait démontrer que, quelle que soit la configuration, on peut la lire comme la projection de cubes. Cela se fait sans grande difficulté en numérotant chaque sommet d'un calisson, de proche en proche avec trois coordonnées entières comprises chacune entre 1 et n . Cette méthode associe un triplet unique à chaque sommet de calisson et l'on a ainsi affecté à chaque sommet du graphe un point de l'espace de coordonnées (a, b, c) . Nous sommes donc certains que la projection de la configuration peut se lire comme la projection de cubes.

Des cercles égaux

On considère trois cercles CI , CJ et CK de même rayon R , passant par un même point O et de centre respectif I, J, K . On note A le deuxième point d'intersection de CJ et CK , de même B est le deuxième point d'intersection de CI et CK , et C celui de CI et CJ . Alors les points I, J et K appartiennent à un même cercle CL de centre L et de même rayon R (en rouge sur la figure au haut de la page).



Voici la démonstration dans le plan. Les cercles ayant même rayon, nous avons : $IO = IB = IC = JO = JA = JC = KO = KA = KB = R$.

Par conséquent, les quadrilatères $IOKB, JOIC, KOJA$ sont des losanges. Donc les droites IO, JC, KB sont parallèles, de même JO, KA, IC et KO, IB, JA .

Il s'ensuit que l'on peut construire un losange $IBLC$ de côté R sur IB, IC et de sommet L .

Mais alors LC est parallèle à JA et $JALC$ est aussi un losange de côté R . Nous en déduisons que $LA = LB = LC = R$, ce qui permet d'affirmer que A, B et C sont sur un même cercle de centre L .

Qu'en est-il dans l'espace ? Au vu de la démonstration précédente, il est tentant de voir en $IOJCLAKB$ la projection d'un cube. Or, dans un cube, chaque sommet est voisin de trois autres sommets. Ainsi I est équidistant de OBC, J de OCA, K de OAB et enfin L de ABC , d'où le résultat. Il est éventuellement possible de faire intervenir les sphères centrées en I, J, K qui se complètent aisément par une sphère de même rayon centrée en L . Cela achève la démonstration.

Le théorème de Brianchon

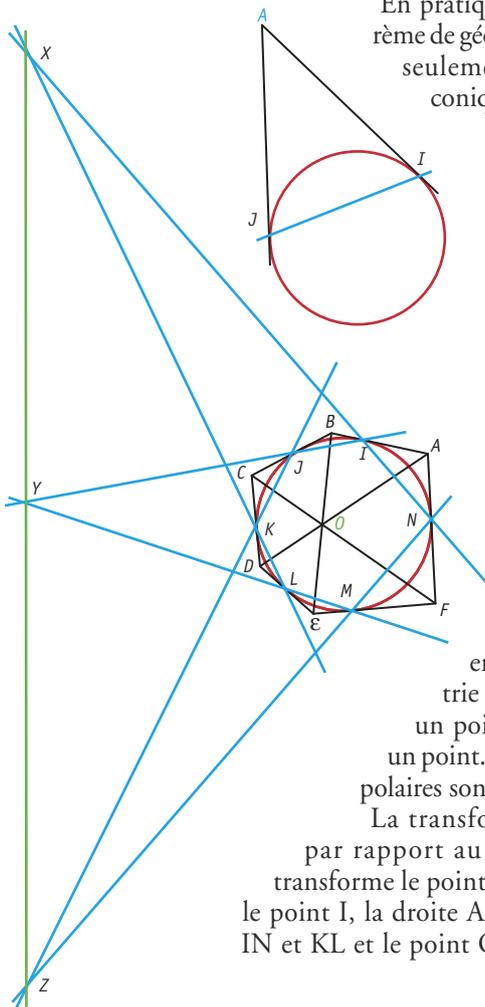
Le théorème de Brianchon affirme que si un hexagone est circonscrit à un cercle, alors les diagonales qui joignent les sommets opposés sont concourantes ou parallèles.

En pratique, ce théorème est aussi un théorème de géométrie projective ; il s'applique non seulement à un cercle, mais aussi à une conique arbitraire.

Charles Julien Brianchon (1785-1864) a démontré ce théorème dans le plan en faisant appel à la transformation par polaire réciproque (une forme de dualité) et en se ramenant ainsi au théorème de Pascal sur les hexagones inscrits dans un cercle dont les côtés opposés se coupent selon trois points alignés (voir la figure ci-contre).

La transformation par polaire réciproque par rapport à un cercle a été étudiée par Jean-Victor Poncelet (1788-1867) et généralisée par Michel Chasles (1793 - 1880). En dépit de sa beauté, la transformation n'est plus guère enseignée aujourd'hui, car la géométrie est bien délaissée : elle transforme un point en une droite et une droite en un point. Si les points sont alignés, les droites polaires sont concourantes, et inversement.

La transformation par polaire réciproque par rapport au cercle inscrit dans l'hexagone, transforme le point A en la droite IN , la droite AB en le point I , la droite AD en le point X d'intersection de IN et KL et le point O en une droite, celle sur laquelle



sont alignés les points d'intersection X, Y et Z des côtés opposés de l'hexagone $IJKLMN$, d'après le théorème de Pascal. Il s'ensuit que les trois droites AD, BE et CF sont concourantes.

On ne sait pas bien comment Pascal a démontré son théorème. On lui doit en revanche sa généralisation à une conique quelconque.

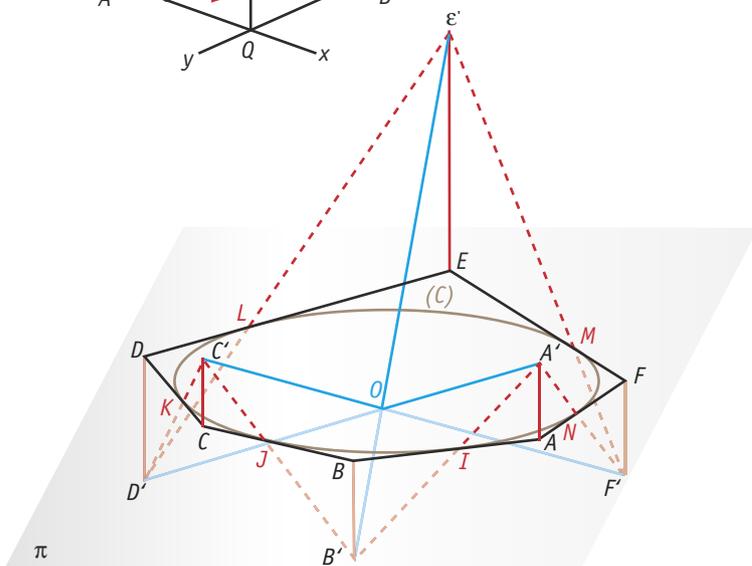
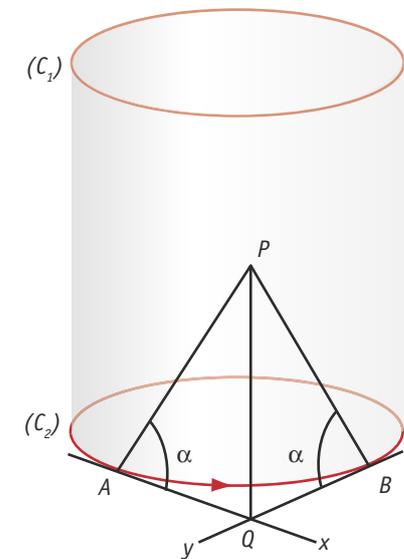
Il est clair que cette démonstration synthétique du théorème de Brianchon n'est pas accessible à un lycéen. Une démonstration directe est longue et fastidieuse.

La démonstration de Brianchon dans l'espace est due à Miguel de Guzmán. Elle apparaît dans la revue espagnole *Investigación y Ciencia* (février 1983), mais Guzmán l'a découverte en 1976.

Commençons par deux lemmes. Le premier est illustré par la figure ci-dessous ; nous en laissons la démonstration au lecteur. On considère un cylindre circulaire droit de base le cercle (C_1) que l'on oriente arbitrairement. Soit deux points A et B de (C_1) et les deux demi-tangentes (Ax) et (By) de sens contraire en A et B . Soit P_1 et P_2 les plans tangents au cylindre en A et B , plans que l'on oriente de la même façon vus de l'intérieur du cylindre. Soit enfin deux droites tangentes au cylindre en A et B et faisant des angles opposés avec les demi-tangentes.

Alors ces deux droites sont soit parallèles, et alors A et B sont diamétralement opposées, soit se coupent en un point P dont la projection orthogonale sur le plan de (C_1) est le point Q intersection des tangentes (Ax) et (By) .

Réciproquement, si Q est l'intersection des tangentes en A et B au cercle (C_1) et si on se donne P tel que PQ est parallèle à l'axe du cylindre, alors les droites PA et PB font des angles opposés avec AQ et BQ .



Le deuxième lemme annonce que trois droites de l'espace qui ne sont pas coplanaires et qui se coupent deux à deux passent par un même point. En effet si elles se coupent deux à deux en trois points, ces trois points définissent un plan auquel appartiennent les trois droites.

Considérons le cercle (C) dans le plan π et l'hexagone circonscrit $ABCDEF$ (figure de droite en bas de page), les points de tangence étant I, J, K, L, M, N . Par A traçons la perpendiculaire à π jusqu'en un point arbitraire A' . Joignons A' à I et prolongeons jusqu'à couper en B' la perpendiculaire à π en B . Continuons ainsi dans l'espace pour obtenir successivement les points A', B', C', D', E', F' , et nous revenons en A' . Considérons alors les droites $A'D', B'E'$ et $C'D'$. Observons que $A'B'$ et $D'E'$ sont dans la situation du lemme 1 et qu'ainsi ces droites sont soit parallèles, soit concourantes et, par suite, A', B', D', E' sont coplanaires et les droites $A'D'$ et $B'E'$ sont parallèles ou concourantes ; mais elles ne peuvent être parallèles par construction : elles sont donc concourantes. Il en est de même pour les droites $B'E'$ et $C'F'$ et pour $C'F'$ et $D'A'$. D'après le lemme 2, il s'ensuit que ces trois droites sont concourantes en un point O . Mais alors leurs projections orthogonales sur π ne sont autres que les diagonales de l'hexagone qui se coupent en un point O .

Utilité des démonstrations venues de l'espace

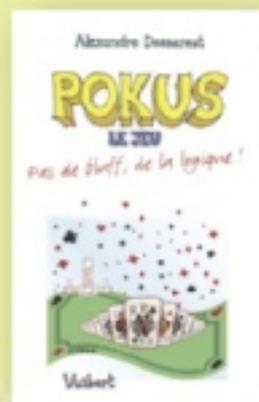
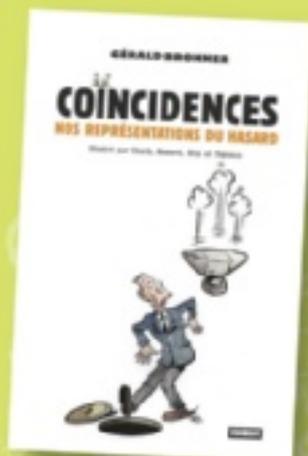
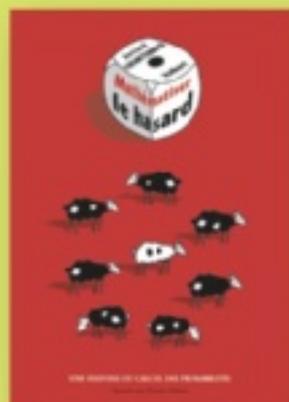
Certaines démonstrations ne sont guère apparentes dans le plan, les exemples précédents l'ont montré. Voir dans l'espace n'est pas habituel et pourtant, pour au moins la démonstration sur le rangement des calissons, il suffit de dire : « Regardez la figure comme une figure de l'espace », et la démonstration saute aux yeux. C'est ce qui s'appelle changer de point de vue, attitude indispensable pour qui veut faire un tant soit peu de recherche, en mathématique, comme dans d'autres disciplines.

Bien sûr, la démonstration du théorème de Brianchon par Miguel de Guzmán n'est pas évidente, mais force est de reconnaître qu'elle est plus simple qu'une démonstration analytique et qu'elle évite le recours à la dualité et à la géométrie projective, deux théories qu'on ne peut pas qualifier d'élémentaires.

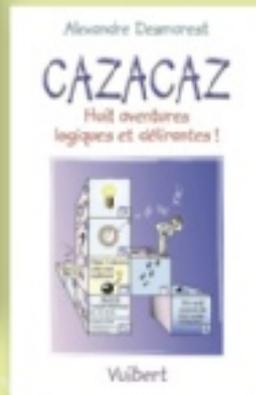
Apprendre à changer de point de vue me paraît essentiel dans la formation. Il est certes beaucoup plus facile d'apprendre des théorèmes et de savoir les appliquer dans des situations évidentes. Seulement, pour cela, nul besoin de professeurs de mathématiques, un répétiteur suffit et, demain, des machines remplaceront l'homme comme elles l'ont remplacé pour bien des calculs. Quand on évoque l'utilité des mathématiques, c'est dans ce genre de formation au changement de point de vue, de formation à la transposition de certains savoirs d'un domaine à l'autre, de formation à regarder autrement une équation ou une figure que les mathématiques sont vraiment appréciables.

Jean LEFORT est ancien professeur de mathématiques en classe préparatoire et ancien animateur de l'IREM de Strasbourg.

Jouez avec les chiffres et les nombres !



À PARAÎTRE

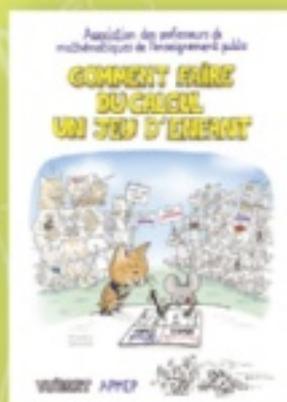
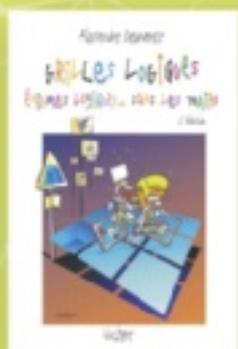
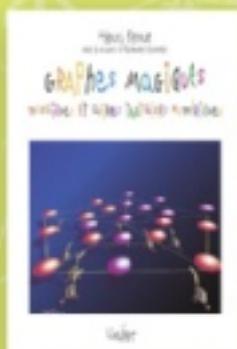
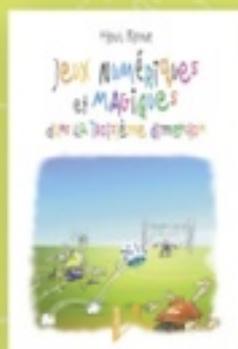
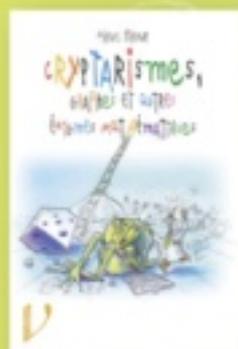


A. Desmarest
7062-5, NC*, 112 p.
En librairie le 14 avril 2008

A. Desmarest
7063-2, NC*, 112 p.
En librairie le 14 avril 2008

Et aussi
Drôles de maths ! Tutti frutti d'énigmes
M. Criton, 2060-6, NC*, 192 p. environ
En librairie le 28 avril 2008

* prix non contractuel



Bon de commande à compléter et retourner aux éditions Vuibert - BP 24 - 23220 Bonnat

ISBN	TITRE	AUTEUR	PRIX	QTÉ	Total
978-2-7117-4039-0	Coincidence	G. Bronner	16 €	—	—€
978-2-7117-7144-8	Comment faire du calcul un jeu d'enfant	APMEP	19 €	—	—€
978-2-7117-4036-9	Mathématiser le hasard	B. Courtebras	25 €	—	—€
978-2-7117-5277-5	Grilles logiques	A. Desmarest	18 €	—	—€
978-2-7117-5270-6	Graphes magiques	H. Berna, A. Desmarest	14 €	—	—€
978-2-7117-5257-7	Palindromes	H. Berna	18 €	—	—€
978-2-7117-5256-0	Cryptarismes	H. Berna	18 €	—	—€
978-2-7117-5262-1	Jeux numériques et magiques	H. Berna	18 €	—	—€

Frais de port :	France métropolitaine	+5 €	—€
	DOM-TOM/Étranger	+14,90 €	—€
TOTAL :			—€

Je souhaite recevoir ma commande à l'adresse suivante :

Nom/Prénom

Adresse

Code postal/Ville

Je joins mon règlement par chèque libellé à l'ordre des éditions Vuibert.

Date : Signature (obligatoire) :

VAM

Les prix indiqués sont des prix publics TTC valables jusqu'au 31 décembre 2008 donnés sans engagement et susceptibles de modifications. Visuels non contractuels.

Tous ces livres sont disponibles en librairie.

Téléchargez ou demandez le catalogue complet sur www.vuibert.fr

Meurtre à Ghastleigh Grange

Ian STEWART

Le célèbre Sherlock Holmes, utilisant la théorie des circuits hamiltoniens, résout l'énigme.

Le soir tombait sur le 221 bis Baker Street. Sherlock Holmes jouait un air irlandais sur son violon, et je fus heureux de l'interrompre.

« Holmes, une lettre vient d'arriver, elle me paraît des plus urgentes.

– Lisez, Watson.

– Elle provient du manoir de Ghastleigh Grange, près de Bas le Moral.

Cher Monsieur Holmes,

Un meurtre abominable a été commis. Miss Melpomène a été écrasée sous le poids d'un énorme lustre. La police n'arrive à rien. De grâce, aidez-nous à éclaircir cet horrible mystère.

Cornelian, duc de Ghastleigh Grange

– Watson, pas un instant à perdre. Bouclez nos bagages et appelez un fiacre pour Waterloo Station. Pas de doute, un meurtre aussi singulier aiguëra nos facultés. »

À notre descente du train à Bas le Moral, nous découvrimus le manoir de Ghastleigh Grange. Le vieux château comprenait 46 tours disposées en trois cercles concentriques autour d'une unique tour centrale. Ces tours étaient reliées par d'étroits et hauts chemins de ronde. La seule entrée visible conduisait, par un pont levés, à la tour la plus à l'Ouest (voir la figure 1).

Nous fûmes accueillis à l'entrée par Basile, le majordome. Il nous conduisit, par un escalier tortueux et un chemin de ronde, à une tour voisine, où le duc lui-même nous accueillit.

« Oh, monsieur Holmes, s'exclama t-il, je ne saurais assez vous remercier !

– Venons-en au fait...

– Le meurtre a été commis dans la chambre de miss Melpomène. Souhaitez-vous examiner cette pièce ?

– Dans un instant, monsieur le duc, je dois d'abord envoyer un télégramme.

– Basile va s'en charger, monsieur Holmes. Nous attendrons son retour, ce ne saurait être long. »

Bientôt le majordome revint.

« Messieurs, veuillez me suivre, dit le duc. Chaque tour

du manoir ne comporte qu'une unique grande pièce, et chacune de ces pièces est habitée par un des membres survivants de la lignée des Ghastleigh. »

Le lieu du crime

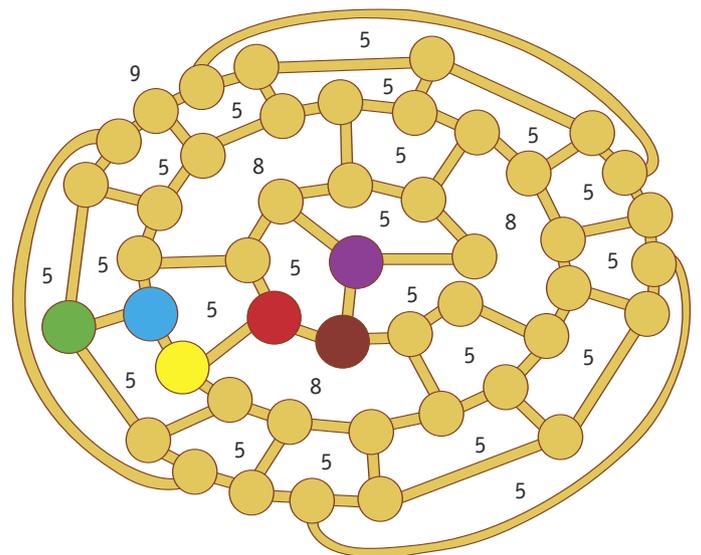
Ils entrèrent dans la tour de feu miss Melpomène.

« C'est ici que le meurtre infâme fut commis, soupira le duc. Là se trouvait un grand lustre, pendu au centre de la voûte ; le meurtrier s'est arrangé pour le détacher, et il est tombé sur la pauvre mademoiselle qui dormait juste en dessous.

– Qui a trouvé le corps, demandai-je ?

– Moi, monsieur, répondit le majordome. Ce qu'il en restait, monsieur.

– Ainsi vous êtes la dernière personne à avoir vu miss Melpomène vivante.



1. LE MANOIR DE GHASTLEIGH GRANGE est la scène du crime. Miss Melpomène a été tuée dans sa chambre. Les nombres indiquent combien de chemins de ronde entourent chaque région.

– Le meurtrier mis à part, oui. »
Je remarquai que Holmes, qui fure-
tait dans la pièce, aidé de sa loupe, s'était
arrêté et écoutait avec attention.

« J'ai peur que nous ne trouvions rien
ici, Watson, dit-il. La police a déjà trop
bien cherché. »

Il regarda Basile.

« À quelle tour conduit cette porte ?

– À celle de la duchesse d'Échaussette.

– Pourrait-elle être la meurtrière ?

– Basile a l'unique trousseau de clefs, dit le duc. De
plus, elles sont de dessins si complexes, que je crois impos-
sible à quiconque d'en faire des doubles. Par ailleurs, la
duchesse est terriblement sourde, et elle passe le plus
clair de son temps à dormir. »

Holmes opina.

« Y avait-il quelqu'un dans sa chambre la nuit du crime ?

– C'est à peu près certain, soupira le duc. Tous les
membres de ma famille sont confinés la nuit dans leur
chambre par les dernières volontés de mon grand-père. Le
premier duc avait terriblement peur de la solitude, aussi
son testament imposa à chacun de ses descendants de passer
toutes les nuits au manoir, sous peine de perdre tout droit
à la fortune de la famille.

– En effet, monsieur, dit Basile. Chaque soir, je vérifie
chaque tour et ferme à clef toutes les portes de communi-
cation. Chaque matin, je reprends ma ronde et les ouvre.
Ce matin terrible, je frappai à la porte de miss Melpomène.
Il n'y eut aucune réponse. Je m'inquiétai et ouvris sa
porte. C'est alors que je vis les... restes.

– Et personne n'est ni entré ni sorti du manoir
durant cette nuit ?

– Non, monsieur ; jamais, monsieur. La seule manière
de sortir est de traverser les tours voisines jusqu'à ce qu'on
atteigne la tour d'entrée, celle où je passe toutes mes nuits.
Et je peux affirmer que personne n'est passé, ni en entrant
ni en sortant.

– Et tous les résidents étaient en bonne santé lorsque
vous les avez enfermés ?

– Parfaitement, monsieur. Ils ont tous des cordons de
sonnette dans leur tour, monsieur, et une fois les portes
verrouillées, ils sonnent dans la tour du duc pour confirmer
leur présence.

– J'utilise les sonnettes pour vérifier qu'ils se confor-
ment aux termes du testament, dit le duc. Basile dit vrai.
Je tiens un décompte strict, et chaque sonnette a tinté.

– Mais un intrus n'a aucun mal à tirer une sonnette,
protestai-je.

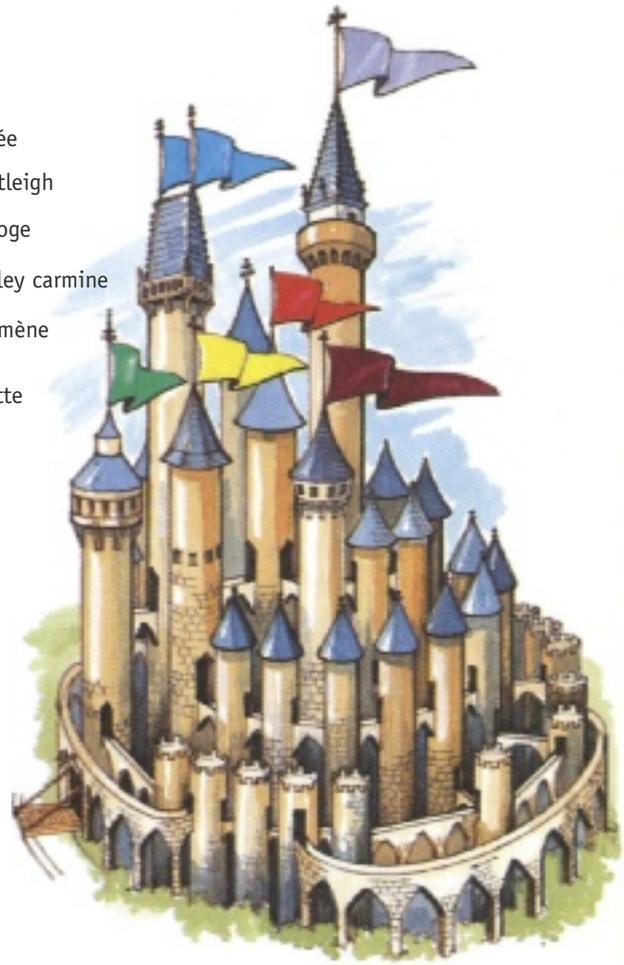
– Non, docteur Watson, répliqua le duc. Chaque rési-
dent a un code personnel, connu seulement de lui et de moi. »

Ronde de nuit

Holmes se tourna vers Basile.

« Y a-t-il une tour où vous êtes entré plus d'une fois ?

– Oh non, monsieur Holmes, s'écria le majordome.
Je n'entre dans chaque tour qu'une fois, lorsque je fais
ma ronde ; c'est une règle inviolable. Il ne serait pas



convenable de déranger quelqu'un alors que sa tour a déjà
été fermée. »

Holmes changea de sujet.

« Monsieur le duc, la police a-t-elle découvert l'heure
présumée de la mort ?

– Non. Impossible à préciser, monsieur Holmes, à
cause de l'état du corps. D'après la température du sang,
les policiers pensent qu'elle eut lieu vraisemblablement avant
minuit. »

Holmes fronça les sourcils.

« Existe-t-il un quelconque chemin pour passer entre
les tours, autre que les chemins de ronde surélevés ?

– Un montagnard exercé pourrait peut-être escalader les
murs, mais, monsieur Holmes, il ne pourrait jamais faire
cela de nuit. La famille des Gastleigh est très à cheval sur
la sécurité : à la fin de sa ronde nocturne, Basile libère une
meute de chiens sur les terres du manoir. »

Le facteur se présenta à l'entrée, avec un télégramme
pour Holmes, sans aucun doute une réponse à sa propre
missive. Alors qu'il le lisait, je voyais ses paupières se serrer.

« Quel parcours utilisez-vous pour vos rondes, Basile ?

– Cela dépend, monsieur.

– Vous souvenez-vous de celui que vous avez emprunté
le soir du meurtre ?

– Non monsieur.

– C'est vraiment des plus fâcheux. »

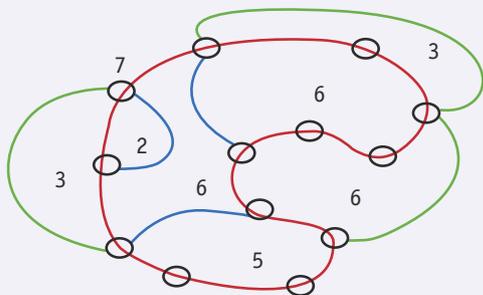
Pensif, Holmes secouait la tête.

« Watson, nous allons loger à l'hôtel pour la nuit. Nous
ne pouvons faire plus ici.

– Mais, monsieur Holmes, le meurtre restera-t-il impuni,
interrogea le duc ?

LA FORMULE DE GRINBERG

Le graphe ci-dessous a 13 sommets reliés par 19 arcs. Une boucle fermée (*en rouge*) passe par chaque sommet une fois et une seule. Une telle boucle est un circuit hamiltonien. Les arcs qui ne font pas partie de la boucle sont des arcs diagonaux intérieurs (*en bleu*) ou des arcs diagonaux extérieurs (*en vert*). La boucle et les arcs diagonaux délimitent plusieurs régions, chacune avec un nombre d'arcs limites, ou côtés.



Si F_j est le nombre de régions intérieures au circuit et à j côtés, alors $F_2 = 1$, $F_3 = 1$ et $F_6 = 2$. De même, si G_k est le nombre de régions extérieures au circuit et à k côtés, alors $G_3 = 2$, $G_6 = 1$ et $G_7 = 1$. Comme le graphe contient un circuit hamiltonien, il doit satisfaire à la formule de Grinberg, c'est-à-dire, dans ce cas :

$$(F_3 - G_3) + 2(F_4 - G_4) + 3(F_5 - G_5) + 4(F_6 - G_6) + 5(F_7 - G_7) = 0.$$

La substitution de leurs valeurs donne ici, pour le membre de gauche :
 $(0 - 2) + 2(0 - 0) + 3(1 - 0) + 4(2 - 1) + 5(0 - 1)$,
 qui est bien égal à 0.

– Je n'ai pas dit, monsieur le duc, que je ne pouvais résoudre votre énigme. J'ai simplement dit que mon enquête ici était achevée. Le docteur Watson et moi-même avons un certain travail à faire. Quoiqu'il en soit, je ne doute pas que, peu après, je puisse identifier le criminel. Basile, s'il vous plaît, appelez une voiture. »

Holmes et moi nous retirâmes dans la meilleure auberge de Bas le Moral.

« Holmes, pensez-vous vraiment ce que vous avez dit au duc ? Pourrez-vous nommer le meurtrier ?

– Watson, m'avez vous jamais vu mentir à un duc ?

– Mais... Nous en savons si peu.

– Non-sens, Watson ! Répétons les faits pertinents. Miss Malpomène a été tuée avant minuit. Aucun intrus n'a pu entrer ou sortir, à cause des chiens. Le meurtrier est donc un habitant du manoir. Basile a enfermé les habitants du manoir dans leurs chambres séparées et ils ont confirmé leur présence au duc une fois laissés seuls. Basile est parti de la tour d'entrée et y est retourné, entrant dans chaque tour exactement une fois. Après que les chambres ont été verrouillées, les seuls résidents capables d'entrer dans celle de miss Melpomène sans être vus sont ses voisins immédiats, mais pour cela il leur faudrait une clef, et Basile possède l'unique trousseau des clefs, et elles ne peuvent être copiées. Qui, dès lors, peut avoir commis le meurtre ?

– Heu, heu... Oh, bien sûr ! C'est Basile ! Il a pu retourner dans la chambre de miss Melpomène après qu'elle a actionné sa sonnette pour attester de sa présence.

– Précisément. Le duc nous a dit que la duchesse d'Échaussette, dont la chambre est adjacente, est plus sourde qu'un pot et a le sommeil lourd. Basile pourrait avoir attendu dans la chambre de la duchesse jusqu'à ce que miss Melpomène ait actionné sa sonnette, puis être revenu pour la tuer.

– Avec le lustre ?

– Avec une autre arme, un morceau de tuyau de plomb peut être. Puis il s'est arrangé pour faire tomber le lustre afin de masquer son acte.

– Intéressante théorie », lui dis-je.

Sherlock opina.

« Mais, jusqu'à présent, seulement une théorie, Watson. Comment prouver que Basile est l'assassin ? La duchesse d'Échaussette n'a pas été réveillée par son retour et, dès lors, il a pu continuer sa ronde comme si de rien n'était.

– La chute du lustre aurait sûrement réveillé quelqu'un...

– Les tours sont bien séparées les unes des autres. Non, personne n'aurait entendu.

– Basile aurait été retardé dans sa ronde.

– De quelques minutes seulement s'il avait, auparavant, coupé à moitié l'attache du chandelier. Pas assez pour attirer l'attention. »

Je me frappai le front de la main.

« Alors, nous avons échoué, Holmes. Ce ne saurait être quelqu'un d'autre que Basile, et cependant le scélérat restera libre. »

Holmes rit.

« Certes non, Watson. Si la chance est avec nous, il pourrait bien être condamné par ses propres dires. »

Un circuit impossible

Il me tendit une feuille de papier. C'était la carte du manoir.

« Watson, dit-il, voici une petite énigme à votre intention. Basile dit que, lors de sa ronde vespérale, il traverse chaque tour une fois et une seule. Il ne peut passer d'une tour à une autre que par les chemins de ronde. Pourriez vous me trouver un tel circuit ?

– Certainement, Holmes. Il doit y avoir des centaines de solutions.

– En vérité, Watson, je soupçonne qu'il n'y en ait même pas une. Ce que je vous ai demandé, c'est de trouver un circuit hamiltonien : une boucle fermée à travers un graphe qui passe par chaque sommet une fois et une seule. On appelle ainsi ces circuits en hommage à sir William Rowan Hamilton, qui proposa un tel problème : il s'agissait de trouver un tel circuit sur les côtés d'un icosaèdre. Aucune méthode automatique n'est connue, au-delà du tâtonnement systématique, pour déterminer si, sur un exemple donné, un tel circuit hamiltonien existe.

– Alors, Basile semble un expert, Holmes, car ici le nombre de tours est trop grand pour opérer par tâtonnements.

– Pas nécessairement, Watson. J'espère que, dans ce cas, la chance sera de notre côté. J'ai étudié un travail fascinant d'un mathématicien russe nommé E. Grinberg. Il a découvert une condition que devait satisfaire un graphe plan pour posséder un circuit hamiltonien. Nous allons voir si elle est vérifiée par les tours du manoir (les sommets) et les chemins de ronde (les arcs). Suivez mon raisonnement, Watson.

– Je fais de mon mieux, Holmes.

– Imaginez un graphe qu'on puisse dessiner dans un plan, c'est très important, Watson. Les chemins de ronde de Ghasleigh Grange ne se coupent pas. Supposez que le graphe possède n sommets et un certain nombre d'arcs (voir l'encadré de la page 66). Tenez pour acquis qu'un circuit hamiltonien décrit les sommets...

– Autrement dit, interrompis-je, vous supposez qu'il existe un chemin fermé utilisant les arcs du graphe et passant par chaque sommet exactement une fois.

– Exactement. Eh bien, si ce chemin hamiltonien existe, nous pouvons en déduire certaines caractéristiques du graphe. Tout d'abord, nous savons que le circuit hamiltonien a n arcs, puisqu'il passe par chaque sommet une seule fois. Les autres arcs n'appartenant pas au circuit hamiltonien, les arcs « diagonaux », sont à l'intérieur ou à l'extérieur du circuit. L'intérieur du circuit est divisé en un certain nombre de régions par ces arcs diagonaux. Si ces arcs sont en nombre d , le nombre de régions est égal à $d + 1$.

– Pourquoi cela, Holmes ?

– Imaginez que l'on ajoute ces arcs diagonaux un à un. Le circuit hamiltonien borde lui-même une région et chaque arc supplémentaire ajoute une région. Mais il y a une autre manière de compter le nombre de ces régions. Chaque région a un certain nombre de côtés, constitués par les arcs du graphe qui la limitent. Supposons que, pour tout entier j , F_j soit le nombre de régions intérieures ayant j côtés. Alors, le nombre de régions à l'intérieur du circuit est égal aussi à :

$$F_2 + \dots + F_n, \text{ et donc } F_2 + \dots + F_n = d + 1$$

– Nombre de ces F_j valent zéro, n'est-ce pas ?

– Oui. À présent, je vais compter le nombre d'arcs limitant ces régions de deux manières différentes. Toutes les régions limitées par j arcs contribuent pour jF_j à ce nombre d'arcs.

– De sorte, Holmes, que le nombre d'arcs limitant les régions vaut :

$$2F_2 + 3F_3 + \dots + nF_n.$$

– Pas exactement. Dans un tel décompte, chacun des arcs diagonaux est compté deux fois, alors que les arcs du circuit hamiltonien ne sont comptés qu'une fois, de sorte que : $2F_2 + 3F_3 + \dots + nF_n = 2d + n$. Si, à présent, je soustrais à la deuxième relation le double de la première, j'obtiens :

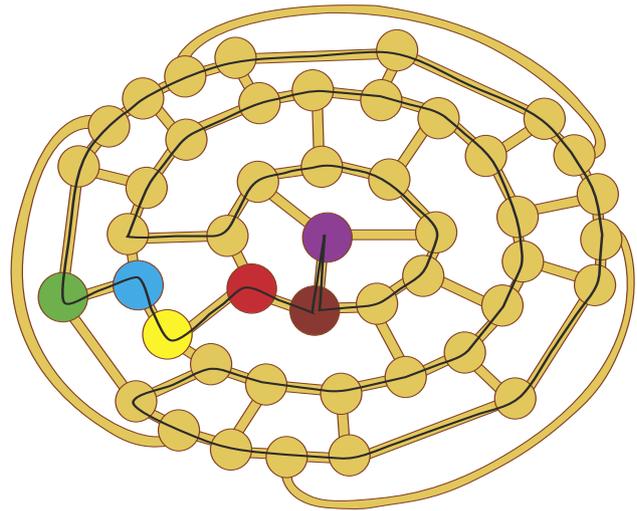
$$F_3 + 2F_4 + \dots + (n-2)F_n = n - 2$$

Il y a une relation similaire pour l'extérieur du circuit : $G_3 + 2G_4 + \dots + (n-2)G_n = n - 2$, si G_j désigne le nombre de régions extérieures au circuit et à j côtés. Enfin, soustrayant une relation de l'autre, j'atteins mon but, la formule de Grinberg :

$$(F_3 - G_3) + 2(F_4 - G_4) + \dots + (n-2)(F_n - G_n) = 0.$$

– Élégant, Holmes, et subtil, à coup sûr, mais je n'en vois pas l'application à la culpabilité de Basile. Nous n'avons pas d'idées sur les valeurs des F_j ou des G_k . De plus, si aucun circuit hamiltonien n'existe, ces valeurs ne sont même pas définies.

– Ce que j'espère, c'est que supposer l'existence d'un tel circuit entraînera à une contradiction logique. À présent, Watson, si vous examinez le graphe du manoir de Ghasleigh



2. BASILE NE PEUT VISITER TOUTES LES TOURS du manoir de Ghasleigh Grange sans revenir sur ses pas. Comme on le voit ci-dessus, il doit entrer de nouveau au moins dans une des tours déjà visitée.

Grange, vous remarquerez que chacune de ses régions ont cinq, huit ou neuf côtés. Si le graphe admet un circuit hamiltonien, alors, d'après la formule de Grinberg, $3(F_5 - G_5) + 6(F_8 - G_8) + 7(F_9 - G_9) = 0$, mais il n'y a qu'une région à neuf côtés, la frontière externe du graphe, de sorte que $F_9 - G_9$ est soit égal à 1, soit égal à -1 . Oui, je crois que nous tenons le scélérat. À présent, nous devons logiquement conclure que $3(F_5 - G_5) + 6(F_8 - G_8) = \pm 7$, mais une telle équation n'a pas de solution, car F_8, G_5, F_8 et G_8 sont des entiers, et le membre de gauche ne peut donc être qu'un multiple de 3, ce que n'est ni 7 ni -7 .

– Donc, il n'y a pas de circuit hamiltonien ! Basile ment. Holmes, je suis muet d'admiration. »

Holmes sourit au compliment autocontradictoire.

« Merci, Watson. Basile doit avoir visité deux fois une tour pour le moins. Pourquoi a-t-il menti ? Pour ne pas avouer son stratagème. C'est dans la tour de miss Melpomène qu'il est revenu. Accessoirement nous avons montré qu'il y a au moins un chemin visitant toutes les tours une et une fois chacune, celle de Melpomène exclue. Il faudrait revoir la topologie du château pour éviter ce type d'incident. Il n'empêche : demain, nous pourrions confondre Basile.

– Brillant, Holmes. Mais... Qu'est ce qui vous a mis sur cette voie ?

– J'ai envoyé un télégramme à *Scotland Yard* pour avoir une liste des suspects, et j'ai lu que le premier prénom de Basile, Charles ou Camille, je crois, commençait par un C, et que son nom de famille était celui d'une vieille famille hongroise, les Kyloxi. »

Je me grattai la tête, décontenancé.

« Oui, et alors, Holmes ?

– Qu'aurais-je pu conclure d'autre après avoir reçu un télégramme de *Scotland Yard* indiquant "C. Basile Kyloxi" ? »

Ian STEWART est professeur de mathématiques à l'Université de Warwick.

Ron GOULD (sous la direction de), *Graph Theory*, Benjamin Cummings, 1988.

I. STEWART, *L'univers des nombres*, Belin, 2000.

I. STEWART, *Visions géométriques*, Belin, 1994.

Les joies du pliage

Pierre TOUGNE

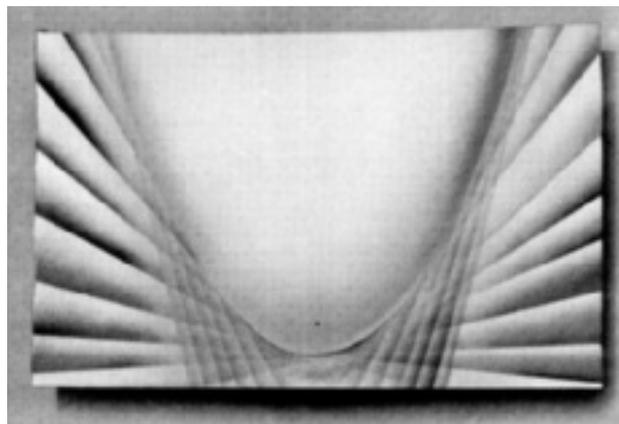
Quand l'art mineur des origamis s'associe avec la plus belle des sciences, la géométrie.

Qui n'a pas, durant sa jeunesse, fait des cocottes en papier ? Tel Monsieur Jourdain, il faisait des origamis sans le savoir ! « Origami » est le mot japonais qui signifie pliage de papier et dont le nom est devenu international. L'origine de tels pliages est mal connue, mais on l'associe généralement à la découverte de la fabrication du papier en Chine, au début du II^e siècle. À partir du VII^e siècle, date où la technique de fabrication du papier a été introduite au Japon, le pliage du papier connut un essor considérable, qui se perpétue encore de nos jours. Au début, l'art du pliage fut essentiellement religieux ; les pliages étaient utilisés dans les cérémonies de mariage ou comme porte-bonheur. Plus tard, vers le XVII^e siècle, apparurent des pliages utilitaires tels que sachets, boîtes à épices, becs verseurs, etc., puis les pliages récréatifs et décoratifs. Les premiers livres d'origamis datent d'environ 1700 : le célèbre livre *Comment plier 1000 grues* est publié en 1797. Les pliages les plus anciens, qui remonteraient à l'ère Heian (794-1185), décrits dans un manuscrit japonais appelé *Kan No Mado*, datent de 1850.

En Occident, le début du pliage de papier coïncide avec l'introduction du papier en Espagne par les Arabes, au



1. PLIAGES DE LA BASE PRÉLIMINAIRE et de la bombe à eau.



XII^e siècle. L'Espagne a développé ses propres modèles indépendamment du Japon, comme par exemple la célèbre « cocotte » (*pajarita*) datant du XVI^e siècle. En France, le pliage le plus ancien semble être « l'éventail magique », un pliage en double accordéon utilisé souvent en prestidigitation, qui est décrit dans *Les récréations mathématiques et physiques* de Ozanam (1735), mais dont on ne sait s'il a été découvert en France ou importé d'Extrême-Orient. Le XIX^e siècle et le début du XX^e siècle marquent l'hégémonie du Japon sur l'art du pliage, qui est enseigné dans les écoles japonaises et possède ses grands maîtres, comme Isao Hondo, Aldra Yoshizawa et Mishio Uchiyama. Après la Deuxième Guerre mondiale, l'art du pliage connaît un renouveau en Occident avec la création de l'*Origami Center* à New York en 1958, la *British Origami Society* en 1967 et le *Mouvement Français des Pliés de Papier* (MFPP) en 1978, dont le site est <http://mfpp.free.fr/>. Les lignes qui suivent sont d'ailleurs inspirées de travaux de Jacques Justin du MFPP.

Revenons au pliage proprement dit, et je ne saurais trop conseiller au lecteur de lire cette rubrique « papier en main », si je puis dire. Du papier à lettres découpé en carré de côté 15 centimètres environ est une bonne taille pour s'initier au pliage. La première étape d'un pliage est ce que les plieurs appellent une base. Deux bases sont à l'origine de beaucoup de pliages, ce sont la base préliminaire et la base de la bombe à eau qui sont décrites sur la figure 1. À partir de ces bases, beaucoup de pliages sont possibles, parmi lesquels j'en ai choisi deux simples et traditionnels : l'oiseau qui bat des ailes (Japon), illustré sur la figure 2 à partir d'une base préliminaire, et la bombe à eau ailée (Espagne), à partir de la base du même nom, montrée sur la figure 3.

Si vos premiers essais ne sont pas concluants, ne vous découragez pas ; il faut un certain temps pour bien « sentir » le papier entre ses doigts.

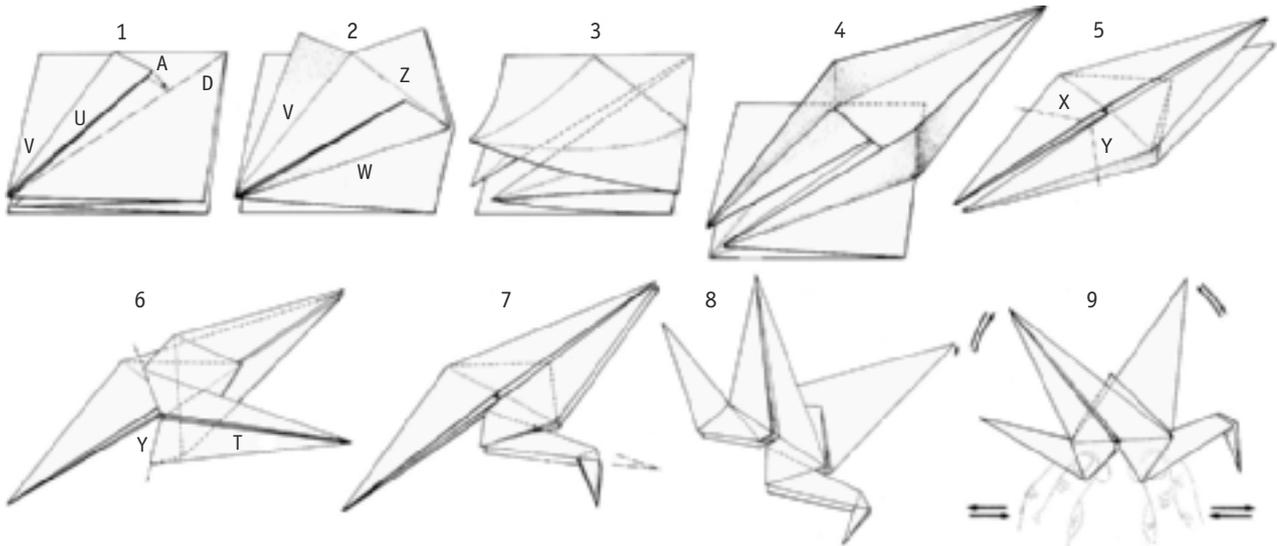
Mon intention ici est d'examiner les relations entre la géométrie et le pliage, et, d'abord, ce que la géométrie apporte au pliage. Prenez une feuille de papier rectangulaire et pliez

une base de l'oiseau, comme indiqué sur la figure 2, pour une feuille de papier carrée. Vous vous apercevez très vite que le pliage obtenu n'est pas aussi « bon » que celui que l'on obtient à partir d'une feuille carrée (le qualitatif « bon » sera précisé plus loin). Le problème est donc de savoir s'il est possible, à partir d'un polygone quelconque, d'obtenir une « bonne » base de l'oiseau.

Ce que la géométrie apporte au pliage

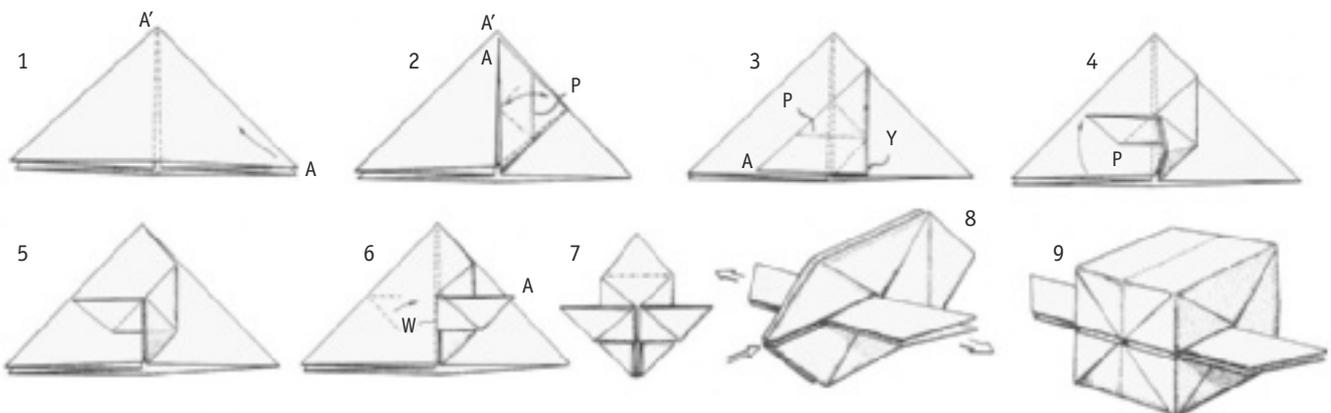
Redéfinissons d'abord ce qu'est une base de l'oiseau à partir d'un polygone. Soit A_1, A_2, \dots, A_n , un polygone quelconque convexe ou concave mais non croisé, et O un point intérieur de ce polygone tel que les triangles $OA_1A_2, A_2A_3 \dots$ ne se recouvrent pas ; un tel polygone est représenté sur la figure 4a. Nous appellerons base préliminaire d'origine O le pliage obtenu en superposant OA_1, OA_2, \dots, OA_n par des plis montagne (c'est-à-dire que le pli amenant OA_1 sur OA_2 formera une arête). Si l'on aplatit le pliage, des plis vallées (en creux) apparaîtront, que l'on note OM_1, OM_2, \dots ,

comme sur les figures 4a et 4b. Dans le pliage obtenu, les points O, A_1, A_2, \dots sont alignés sur une même droite D et les plis tels que $OM_1A_1A_2$ s'articulent comme les pages d'un livre autour de la droite D . Maintenant, pour chaque pli $OM_iA_iA_{i+1}$, amenez par pliage le point M_i sur la droite D , tout en maintenant les sommets A_i et A_{i+1} fixes et aplatissez (il est utile, avant de faire cette opération, de marquer le pli le long des bissectrices des angles M_iA_iO et $M_iA_{i+1}O$). Le résultat de cette opération est que le côté A_iA_{i+1} sera plié autour d'un point E_i (en général, différent de M_i). Le nouveau pli OA_iA_{i+1} , comportant quatre épaisseurs de papier, définit un nouveau point P_i comme montré sur la figure 4c. Le pliage que l'on vient de faire est ce que les plieurs appellent un pli renversé. Ces pliages étant effectués pour tous les plis $OM_iA_iA_{i+1}$, on obtient la base de l'oiseau d'origine O du polygone A_1, A_2, \dots, A_n . Comme la base préliminaire, tous les plis de la base de l'oiseau s'ouvrent comme un livre autour de la droite D ; en revanche, si l'on veut ouvrir le pli $P_1A_2P_2$ autour de P_1P_2 comme charnière, ce n'est en général pas possible sans créer de nouveau pli du papier (ou de le déchirer),



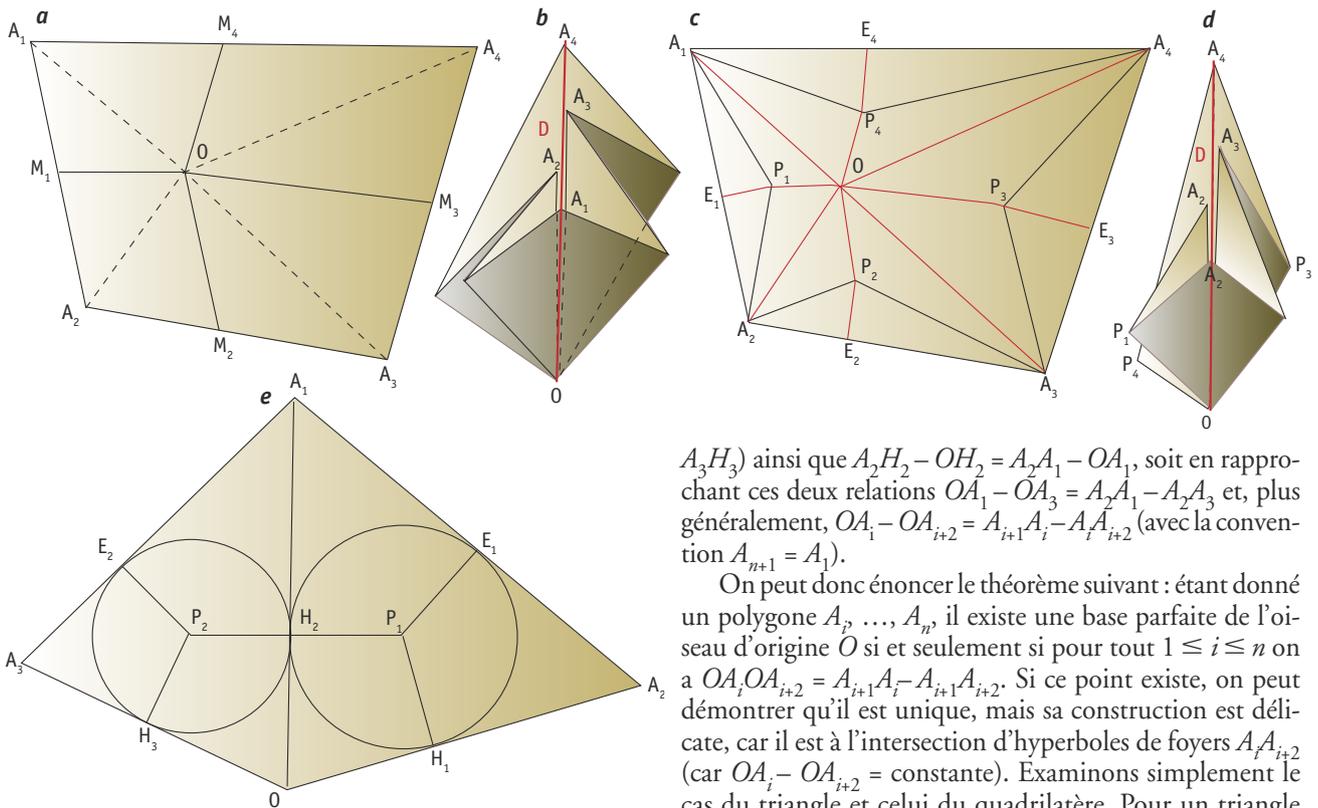
2. PLIAGE DE L'OISEAU QUI BAT DES AILES. (1) On amène la pointe A et le pli U sur la diagonale D pour marquer le pli V . (2) On marque les plis V, W et Z . (3) On réalise un pli de pétale autour du pli Z . (4) Fin du pli de pétale. (5) On répète les opérations 1 à 4 sur

l'autre côté et on marque les plis X et Y . (6) On ouvre et on replie en oreille de lapin autour du pli Y . (7) On replie dans le pli T pour faire la tête. (8) On plie autour de X pour faire la queue. (9) On tire pour que les ailes battent.



3. PLIAGE DE LA BOMBE À EAU AILÉE. (1) On amène la pointe A en coïncidence avec la pointe A' . (2) On marque le pli vallée P . (3) On déplace la pointe A pour l'amener sur le bord inférieur. (4) On déplace la pointe A par pliage autour de P et on écrase le pli.

(5) Le pli V est écrasé. (6) On replie la pointe A autour du pli W . (7) On réalise la même série d'opérations 1 à 6 sur les quatre plis de la base. (8) On souffle en B tout en tirant sur les ailettes. (9) La bombe terminée est prête à l'emploi.



4. PLIAGE D'UNE BASE DE L'OISEAU à partir du quadrilatère.

à l'inverse de la base de l'oiseau standard (construite à partir d'un carré) qui, elle, s'ouvre aussi comme un livre autour de la direction P_1P_2 (qui correspond à la petite diagonale du losange du dessin 5 de la figure 2). Nous dirons donc qu'une base d'oiseau est parfaite si :

(1) Les plis $P_1A_2P_2, P_2A_3P_3, \dots$, s'ouvrent comme les pages d'un livre autour de la droite D . (2) Après pliage du pli $P_1A_2P_2$ autour de P_1P_2 , la nouvelle position de A_2 est sur la droite D . (3) Chaque pli tel que $P_1A_2P_2$ est constitué d'exactly deux épaisseurs de papier.

Une base parfaite

Naturellement, les propriétés que l'on vient d'exiger pour qu'une base de l'oiseau soit parfaite (ou « bonne ») ne sont qu'une partie des propriétés de la base de l'oiseau standard. Le problème est donc de savoir si, pour un polygone donné, un ou plusieurs points O peuvent être l'origine d'une base de l'oiseau parfaite. Pour trouver ce point O , s'il existe, déplaçons la base et aplatissons la feuille comme cela est montré sur la figure 4d dans le cas d'un quadrilatère. Il est intuitif que pour avoir les propriétés exigées précédemment, il faut et il suffit que les droites P_1P_2, P_2P_3, \dots soient orthogonales respectivement à OA_1, OA_2, \dots . Or, du fait même du pliage, le point P_1 est à l'intersection des bissectrices de A_2A_1O et A_1A_2O : c'est donc le centre du cercle inscrit au triangle OA_1A_2 ; de même, P_2 est le centre du cercle inscrit au triangle OA_2A_3 , etc. Enfin, P_1P_2 devant être perpendiculaire à OA_2 , le point d'intersection H_2 de P_1P_2 avec OA_2 est le point de contact avec OA_2 des cercles inscrits aux triangles OA_1A_2 et OA_2A_3 (voir la figure 4e). Nous avons donc $A_2H_2 - OH_2 = A_2A_3 - OA_3$ (car $OH_2 = OH_3, A_2E_2 = A_2H_2$ et $A_3H_2 =$

A_3H_3) ainsi que $A_2H_2 - OH_2 = A_2A_1 - OA_1$, soit en rapprochant ces deux relations $OA_1 - OA_3 = A_2A_1 - A_2A_3$ et, plus généralement, $OA_1 - OA_{i+2} = A_{i+1}A_i - A_iA_{i+2}$ (avec la convention $A_{n+1} = A_1$).

On peut donc énoncer le théorème suivant : étant donné un polygone A_1, \dots, A_n , il existe une base parfaite de l'oiseau d'origine O si et seulement si pour tout $1 \leq i \leq n$ on a $OA_i - OA_{i+2} = A_{i+1}A_i - A_{i+1}A_{i+2}$. Si ce point existe, on peut démontrer qu'il est unique, mais sa construction est délicate, car il est à l'intersection d'hyperboles de foyers A_i, A_{i+2} (car $OA_i - OA_{i+2} = \text{constante}$). Examinons simplement le cas du triangle et celui du quadrilatère. Pour un triangle $A_1A_2A_3$, l'origine O est à l'intersection de deux hyperboles de foyers A_1, A_3 et A_2, A_1 (ou A_2, A_3), donc il existe toujours ; par conséquent, pour un triangle quelconque, il existe toujours une base de l'oiseau parfaite. L'origine de la base de l'oiseau parfaite d'un triangle, que J. Justin suggère d'appeler point de LOISEAU, peut se construire assez facilement. En effet, le point E_1 (point de repliage de A_1A_2) est tel que $E_1A_1 - E_1A_2 = OA_1 - OA_2 = A_1A_3 - A_3A_2$, donc c'est le point de contact du cercle inscrit au triangle $A_1A_2A_3$ avec A_1A_2 ; de même pour les points E_2 et E_3 . D'autre part, $OH_1 = OH_2 = OH_3$, d'où la construction du point O de la figure 4. On trace les trois cercles de centre A_1, A_2 et A_3 de rayons A_1E_1, A_2E_1 , et A_3E_2 ; O est alors le centre du cercle tangent aux trois cercles précédents.

Au contraire du triangle, pour le quadrilatère, il n'existe pas en général, d'origine O qui soit une base parfaite de l'oiseau. En effet, si l'on écrit les relations que doit satisfaire le point O , on a $OA_1 - OA_3 = A_2A_1 - A_2A_3$ et $OA_3 - OA_1 = A_4A_3 - A_4A_1$ dont on déduit $A_1A_2 + A_3A_4 = A_2A_3 + A_4A_1$, c'est-à-dire que les sommes des longueurs des côtés opposés doivent être égales. Ainsi, le rectangle n'est pas une base de l'oiseau parfaite. Remarquons qu'une façon équivalente d'énoncer la condition précédente est de dire que le quadrilatère doit être circonscriptible à un cercle. J'arrêterai ici cette étude des bases parfaites que J. Justin a développée aussi pour la base de la grenouille et la base du moulin à vent (qui permettent de plier la fameuse cocotte), mais j'espère vous avoir montré que les pliages pouvaient susciter des problèmes géométriques intéressants. Certes, le pliage de base de l'oiseau à partir de polygone autre que le carré n'a peut-être que peu d'intérêt pour les origamis, néanmoins, si vous pliez des bases de l'oiseau à partir d'un pentagone ou d'un hexagone régulier, vous aurez certainement des idées pour de nouveaux pliages.

5,95 €
au lieu de 6,90*

*À partir du deuxième numéro commandé

Complétez votre collection !

Numéro	Code
Les illusions des sens	077639
Le cœur	077640
La sphère sous toutes ses formes	077641
Le temps des datations	077642
La vie au temps des mammouths	077643
Les formes de la vie	077644
L'histoire de l'Univers	077645
Génome humain et médecine	077646
Mathématiques exotiques	077647
Le monde des dinosaures	077648
Les chemins de la logique	077649
Les maux de nos ancêtres	077650
Les éléments en furie	077651
La modélisation informatique	077652
La lumière dans tous ses états	077653
Le climat	077654
Les Virus, ennemis utiles	077655
Galaxies, fenêtres sur l'Univers	077656
Sur la trace de nos ancêtres	077657
L'eau Attention, fragile !	077657



Jan.-Mars 2006
code : 077650



Avril-Juin 2006
code : 077651



Juill.-Sept. 2006
code : 077652



Oct.-Déc. 2006
code : 077653



Avril-Juin 2007
code : 077655



Juill.-Sept. 2007
code : 077656



Oct.-Déc. 2007
code : 077657



Jan.-Mars 2008
code : 077658

Pour conserver
votre collection,
l'écrin 12 numéros
pour 14€



Commandez et retrouvez l'intégralité
des numéros disponibles sur notre site :

www.pourlascience.com

Bon de commande Pour la Science - Offre spéciale

À retourner à Pour la Science - Livres BP2 - 28410 Saint Lubin de la Haye

	Code	Prix à l'unité	Prix
1 ^{er} numéro commandé		6,90 €	
2 ^e numéro commandé		5,95 €	
3 ^e numéro commandé		5,95 €	
4 ^e numéro commandé		5,95 €	
5 ^e numéro commandé		5,95 €	
Écrin 12 numéros	802980	14 €	
Frais de port		France : 4,00 € Étranger : 12 €	
Total commande			

Mes coordonnées :

Nom Prénom : _____

Adresse : _____

Code postal : _____ Ville : _____

Pays : _____ Tél : _____

Date de Naissance : _____ E-mail : _____

Je règle par :

Chèque à l'ordre de Pour la Science

Carte bancaire

Numéro de la carte _____

Date d'expiration _____ Cryptogramme _____

Signature obligatoire _____

20007674

En application de l'article 27 de la loi du 6 janvier 2010, les informations ci-dessus sont indispensables au traitement de votre commande. Elles peuvent servir à l'émission d'avis d'impôt et de notification après de Pour la Science. Par votre responsabilité, vous pouvez être amené à fournir des informations complémentaires. Si ce n'est de votre part, il sera fait de votre présence par simple courriel.

Offre valable deux mois dans la limite des stocks disponibles. Délai de livraison : 35 jours environ

EN PLIANT DU PAPIER

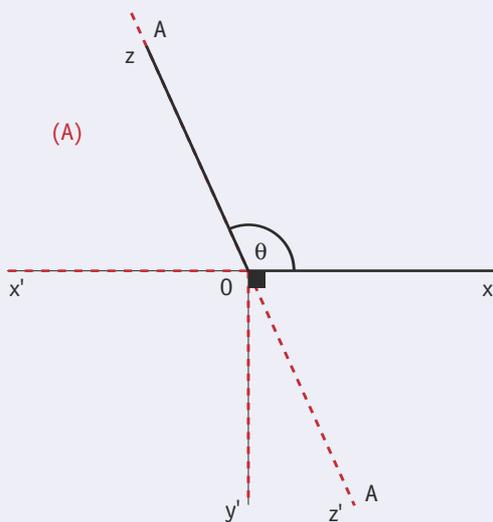
Partager un angle en deux angles égaux est une opération triviale qui conduit à la notion de bissectrice. Il est assez naturel d'essayer ensuite de partager un angle en trois angles égaux, c'est-à-dire de construire ce qu'on appelle assez naturellement une trissectrice.

Très tôt dans l'histoire, les Grecs se sont intéressés à ce problème de trisection. Ils voulaient résoudre le problème à la règle et au compas, mais ils n'y arrivèrent pas, et pour cause, puisqu'il fut démontré au XIX^e siècle que cela est impossible.

En effet, la règle et le compas ne permettent que de résoudre des équations de degré un ou deux et celles qui s'y ramènent. Plus exactement, la règle et le compas ne permettent de construire que la somme, la différence, le produit et le quotient de deux nombres déjà construits ainsi que la racine carré d'un nombre positif déjà construit. On obtient ainsi un corps de nombres qui contient les rationnels mais qui est strictement inclus dans les réels.

Or partager un angle en trois parties nécessite de résoudre une équation du troisième degré, c'est-à-dire l'utilisation de racines cubiques. Une façon de se rendre compte de cette nécessité est de voir comment calculer le sinus et le cosinus de l'angle x connaissant les mêmes fonctions de l'angle $3x$. Nous avons les formules : $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$; $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$.

Curieusement, il existe un instrument très simple qui permet la trisection de l'angle, c'est la feuille de papier. Ça tombe bien, l'angle que l'on veut partager en trois se trouve en général justement tracé sur une feuille de papier ! En voici les étapes : nous partons d'un angle θ .

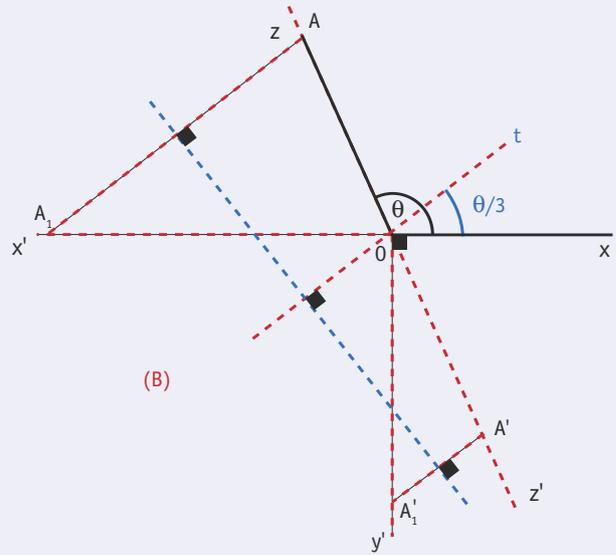


Plions suivant Ox et Oz pour obtenir les plis xx' et zz' , puis plions Ox' sur Ox pour obtenir le pli Oy' perpendiculaire à xx' (A).

Marquons deux points A et A' symétriques par rapport à O sur zz' (donc tels que $OA = OA'$). On peut marquer A seul et tracer A' par pliage.

Effectuons un pli qui amène simultanément A sur xx' en A_1 et A' sur Oy' en A'_1 . Ce pli est matérialisé en pointillé bleu sur la figure en haut à droite.

Plions une dernière fois pour obtenir le pli Ot perpendiculaire au précédent et passant par O .



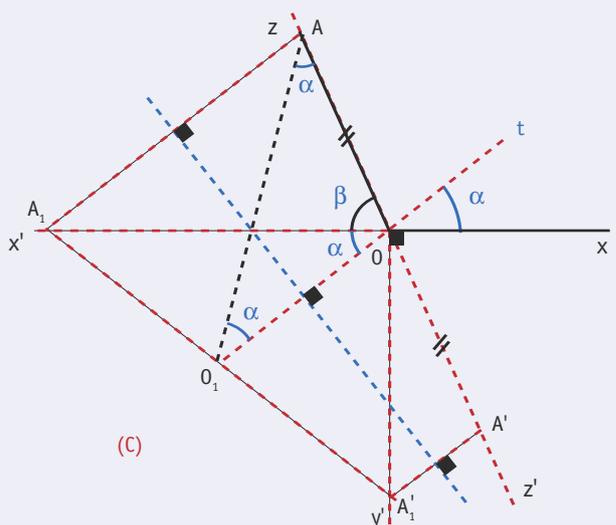
Nous affirmons que la droite Ot trisecte l'angle xOz , c'est-à-dire que l'angle xOt mesure $\theta/3$.

La démonstration de ce résultat est tout à fait élémentaire et repose sur la figure complète ci-dessous.

Dans le pliage qui amène A en A_1 et A' en A'_1 , O vient en O_1 , et OO_1 n'est autre que Ot . On a clairement l'égalité des longueurs $OA = OA' = O_1A_1 = O_1A'_1$.

Dans le triangle rectangle $A_1OA'_1$, O_1 est le milieu de l'hypoténuse et, par suite, $OO_1 = O_1A_1$. Par conséquent, le triangle AOO_1 est isocèle en O .

Notons provisoirement α la mesure de l'angle xOt . C'est également la mesure de l'angle $x'O_1O$ (angles opposés par le sommet) et de l'angle OO_1A , symétrique du précédent dans le pliage. Comme le triangle OO_1A est isocèle, α est également la mesure de l'angle O_1AO .



Dans ce même triangle, la somme des angles vaut π , et en notant β la mesure de $x'Oz$, nous avons $3\alpha + \beta = \pi$. Or $\beta = \pi - \theta$ et, par conséquent, $3\alpha = \theta$.

Jean LEFORT

Inversement, qu'apporte le pliage à la géométrie ? Plier autour d'une droite est équivalent à faire une symétrie autour de cette droite, de même que superposer deux droites par pliage revient à construire la bissectrice de l'angle formé par ces deux droites. Dès lors, le pliage peut permettre soit d'effectuer simplement certaines constructions géométriques, soit de « démontrer » (vérifier) des théorèmes géométriques.

Le pliage illustre la géométrie

Prenez par exemple le pentagone régulier : sa construction à la règle et au compas est sinon difficile, du moins assez longue. Or, par pliage, c'est pratiquement immédiat. Découpez une bande de papier à bords parallèles plus longue que large et faites un nœud simple et serré sans froisser le papier, puis aplatissez le nœud comme illustré sur la figure 5. En coupant les deux extrémités de la bande de papier selon BC et DE , on obtient le pentagone régulier $ABCDE$. La démonstration de ce résultat n'est pas difficile mais un peu longue, et je renvoie le lecteur intéressé par celle-ci au tome 2 des *Récréations Mathématiques* de E. Lucas où elle est décrite. Indiquons simplement qu'en dépliant le pentagone, les côtés et les plis définissent quatre trapèzes dont il faut démontrer l'égalité.

On peut aussi obtenir par pliages des figures plus complexes comme l'ellipse ou la parabole. Rappelons que l'ellipse est le lieu du point M dont la somme des distances à deux points fixes A et B (les foyers) est constante, tandis que la parabole est le lieu des points équidistants d'une droite D (la directrice) et d'un point F (le foyer). Une autre façon de définir ces courbes est d'utiliser un théorème classique de géométrie dit de « génération tangentielle des coniques ». Ainsi, l'ellipse est l'enveloppe du côté d'un angle droit dont l'autre côté passe par un point fixe A et dont le sommet décrit un cercle contenant le point A . Le point A est un foyer de l'ellipse, tandis que le centre du cercle est le centre de l'ellipse. Si l'on fait décrire au sommet de l'angle droit une droite D au lieu d'un cercle, l'enveloppe du côté de l'angle droit ne passant pas par le point fixe est une parabole de foyer A et tangente, en son sommet, à la droite D .

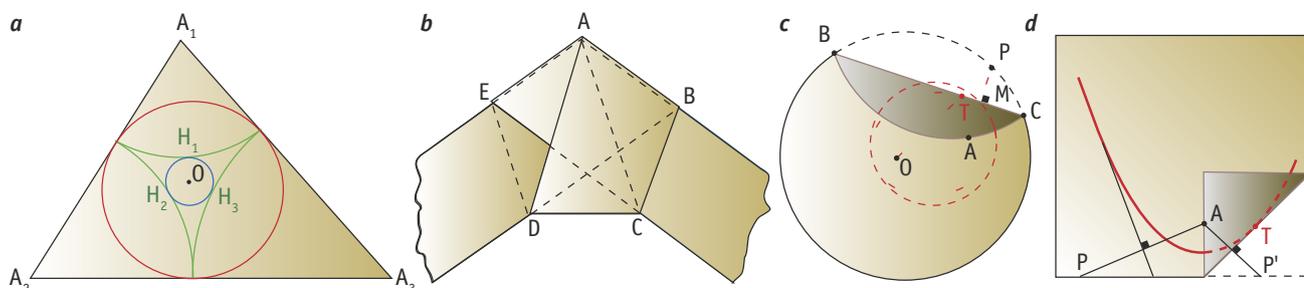
À l'aide de ce théorème, il est maintenant facile d'obtenir la construction par pliages de l'ellipse suivante : prenez une feuille de papier circulaire de centre O et marquez un point A quelconque sur la feuille. Amenez maintenant, par pliage, un point quelconque P de la circonférence en coïncidence avec A (voir la figure 5). Votre feuille sera alors pliée selon une corde du cercle. Si vous répétez ces pliages

pour différents points de la circonférence, vous obtiendrez une suite de plis dont l'enveloppe est une ellipse de foyers O et A . L'explication est simple : si l'on appelle M le point d'intersection de AP avec le pli BC , en raison du pliage, on a $AM = MP$ et l'angle BMP est un angle droit. L'homothétie de centre A et de rapport $1/2$ fait passer de P à M , donc le point M décrit l'homothétique du cercle décrit par P , c'est-à-dire encore un cercle. L'angle droit BMA a son côté MA qui passe par le point fixe A et son sommet qui décrit un cercle (contenant A), donc l'autre côté MB enveloppe une ellipse. Remarquez que pour obtenir une enveloppe circulaire, il suffit de prendre le point O comme point A .

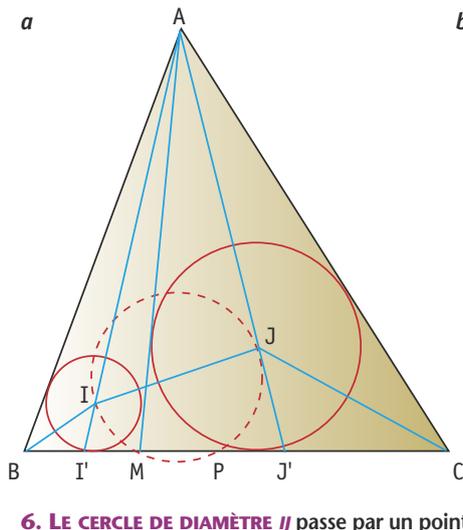
Pour la parabole, le pliage est analogue. On part d'une feuille rectangulaire sur laquelle on marque un point A fixe, puis on amène par pliage le bord du rectangle de façon qu'il passe par A (voir la figure 5a avec comme résultat la figure à côté du titre). En répétant cette opération pour différentes orientations du bord du rectangle, on obtient une succession de plis qui engendrent un arc de parabole. La démonstration est tout à fait semblable au cas de l'ellipse, et je laisse le soin au lecteur de la retrouver. Notons toutefois que les deux constructions que je viens de décrire ne sont pas à proprement parler une construction géométrique « exacte », en ce sens que les points de contact de l'ellipse ou de la parabole avec ces plis ne sont pas localisés par ce pliage. On peut néanmoins facilement les obtenir ; ainsi, dans le cas de l'ellipse, il suffit de plier autour de OP et l'intersection T entre le pli OP et le pli BC est le point de contact de l'ellipse avec BC . À ce sujet, il est souvent écrit dans les livres sur le pliage que toute construction à la règle et au compas est possible par pliage : ce n'est pas exact. Le lecteur intéressé par cet aspect du problème peut consulter *Théorie des corps, La règle et le compas* de Jean-Claude Carréga (Hermann, nouvelle édition 1997).

Le pliage peut aussi « démontrer », ou tout au moins mettre en évidence, une propriété qu'il est parfois délicat d'obtenir géométriquement. Nous allons en décrire deux dues à J. Justin.

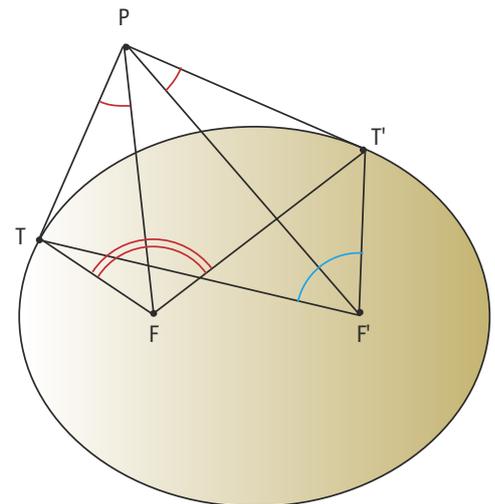
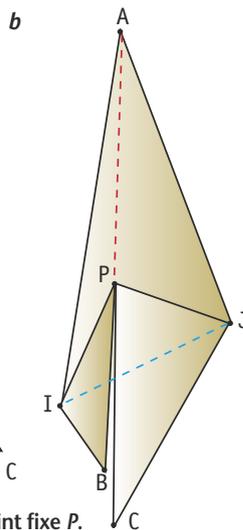
Soit ABC un triangle quelconque et M un point arbitraire intérieur au côté BC . Construisez les centres I et J des cercles inscrits aux triangles ABM et AMC . Le cercle de diamètre IJ (voir la figure 6a) coupe BC en M (en effet, MI et MJ sont les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle BMA , donc l'angle IMJ est droit) et en un deuxième point P . Nous voulons démontrer que le point P est fixe quel que soit M . Géométriquement, ce n'est pas évident, mais, par pliage, cela vient « naturellement ». Pliez AB et AC sur AM par des plis montagne autour de AII' et AJJ' , puis pliez le feuillet $I'J'P$ autour de $I'J'$, en écrasant les plis II' et JJ' (ce



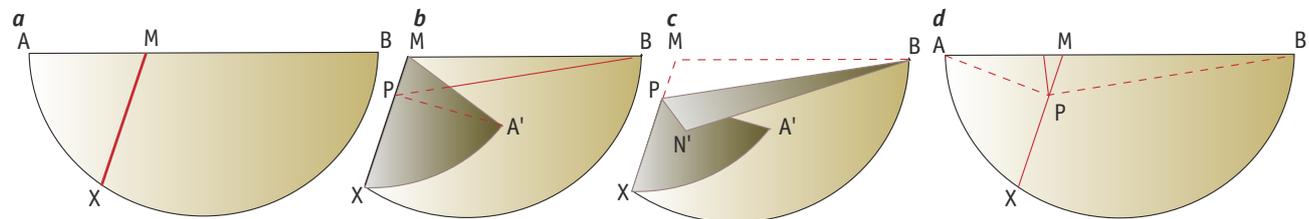
5. CONSTRUCTION DU POINT de Loiseau d'un triangle (a). Construction d'un pentagone régulier par pliage d'un nœud de cravate (b). Construction par pliage d'une ellipse (c) et d'une parabole (d).



6. LE CERCLE DE DIAMÈTRE IJ passe par un point fixe P .



7. THÉORÈME DE PONCELET pour une ellipse.



8. DÉMONSTRATION PAR PLIAGE du théorème de Poncelet pour l'ellipse.

que les plieurs appellent faire un pli de pétale) pour obtenir le pliage de la figure 6b. Que constatez-vous ? Les points A , P , B , C sont alignés et l'on a immédiatement $PC - PB = AB - AC$, donc P ne dépend pas de M . On peut même préciser la position de ce point : c'est le point de contact du cercle inscrit à ABC avec le côté BC . Certes, ce n'est pas une démonstration, et la relation entre le pliage et la preuve géométrique n'est pas du tout évidente. Pour les géomètres, je signale que l'on peut démontrer cette propriété en remarquant que le segment déterminé par les projections orthogonales H et K de I et J sur BC a même milieu que le segment PM , puis en calculant les longueurs BH et BK .

Belle ellipse

La deuxième démonstration par pliages porte sur le théorème de Poncelet pour l'ellipse : Si T et T' sont les points de contact des tangentes issues d'un point P extérieur à une ellipse de foyers F et F' , alors : 1. FP est bissectrice de l'angle TFT' et $F'P$ est une bissectrice de l'angle $TF'T$ et 2. Les angles TPF et $F'PT'$ sont égaux (voir la figure 7).

Prenez une feuille de papier de forme quelconque ayant un bord rectiligne AB . Soit M un point de AB et MX une demi-droite issue de M (voir la figure 8a). Pliez votre feuille par un pli vallée qui amène le point A en A' (voir la figure 8b). Nous avons $MA' + MB = AB$, par conséquent, M appartient à l'ellipse (E) de foyers A' et B dont la longueur du grand axe est AB . Montrons que la droite XM est tangente à l'ellipse (E) en M . Soit P un point quelconque de MX autre que M : si l'on déplie le papier, on constate que $PA + PB = PA' + PB > AB$, donc tout point de MX autre que M est extérieur à l'ellipse (de même que les points de la demi-droite MX' qui n'est pas sur le papier) et MX est donc la tangente

en M à l'ellipse (E) . Pliez maintenant la partie supérieure du papier en écrasant le pli montagne PM par un pli le long de PB , la partie PAX restant fixe. Quand on aplatit, le pli PM s'ouvre et un nouveau pli PN' apparaît, comme cela est montré sur la figure 8c (le trait interrompu correspondant à l'ancienne disposition du papier). Le côté AB étant maintenant replié autour de N' , on a $N'A' + N'B = AB$, donc N' appartient à l'ellipse (E) et, pour la même raison que précédemment, PN' est la tangente en N' à l'ellipse (E) . Puisque nous avons plié autour de BP , BP est bissectrice de l'angle MBN' , de même, en raison du pliage autour de PA' , PA' est bissectrice de l'angle MAN' : c'est la première partie du théorème de Poncelet ! Pour démontrer la deuxième partie, dépliez la feuille de papier pour obtenir la figure 8d. Imaginez une demi-droite d'origine P qui tourne en sens direct en balayant successivement les angles XPB , BPN , NPA et APX , on aura : $XPB + BPN + NPA + APX = 2\pi$

Cette même demi-droite dans le pliage de la figure 8c balayera les angles XPB et NPA dans le sens direct mais, dans le sens rétrograde, les angles BPN et APX , à cause du retournement du papier. D'autre part, cette demi-droite part de PX et revient en PX sans faire un tour complet autour de P . On a donc $XPB - BPN + NPA - APX = 0$. En combinant en deux égalités angulaires, on en déduit $XPB + NPA = \pi$. L'angle MPB étant le complémentaire de XPB , on a $NPA = MPB$. Soit, sur la feuille pliée, $N'PA' = MPB$, la deuxième partie du théorème de Poncelet. Et voilà...

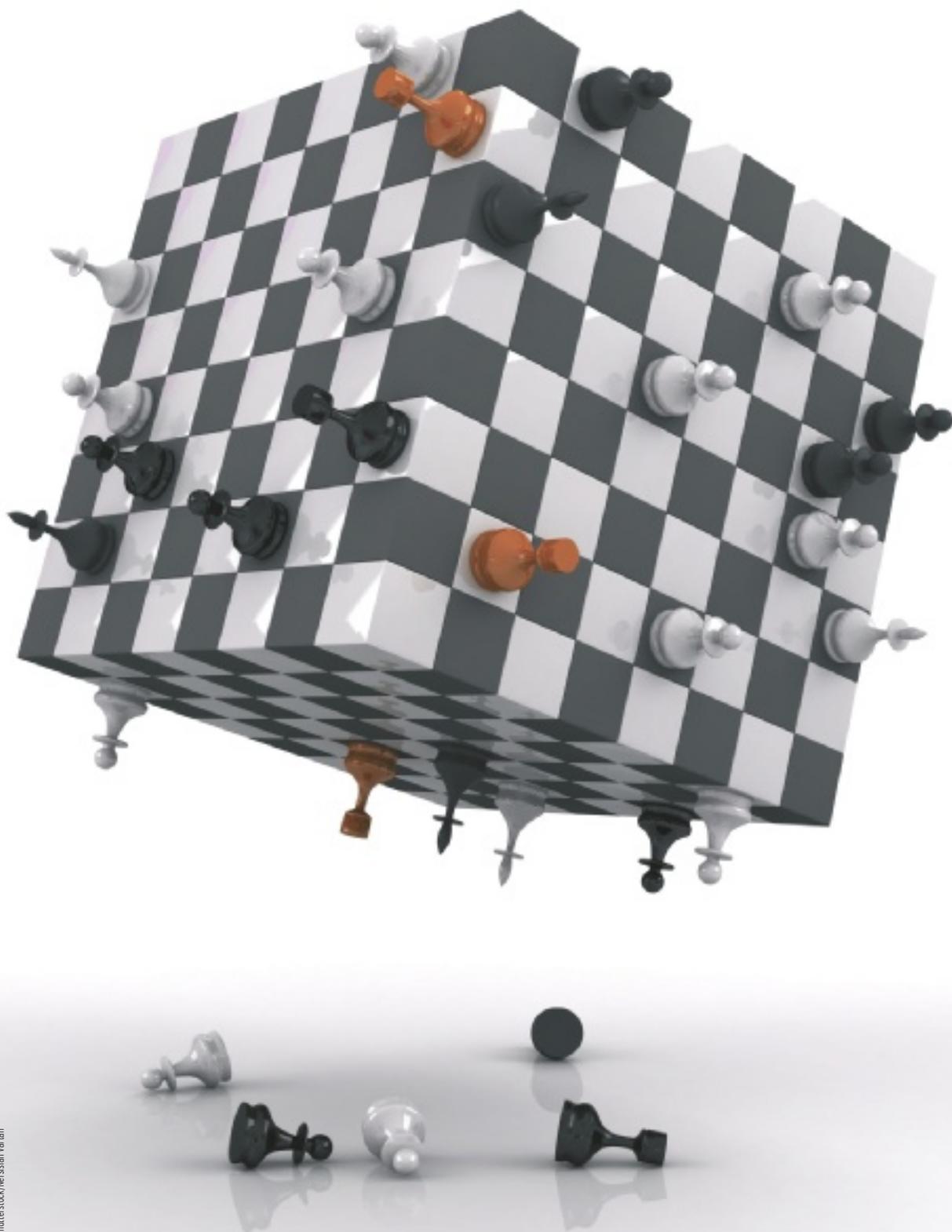
Pierre TOUGNE se présente comme un « mathématicien amateur ».

<http://www.merrimack.edu/~thull/omfiles/mathmodelbib.html>

<http://mfpp.free.fr>

Le plaisir ludique exalte les neurones, mais sans mathématiques, pas de salut ! Elles nous procurent des solutions inattendues aux casse-tête, solitaires, taquins, échecs, dominos et autres puzzles...

2



Des jeux d'esprit

De l'art du solitaire

Pierre TOUGNE

Les possibilités du solitaire sont explicitées par l'examen des invariants des mouvements autorisés des boules. La solution se mémorise avec les mouvements multiples.



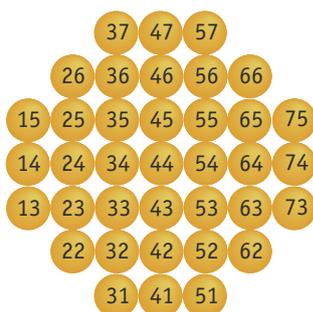
Le solitaire, comme son nom l'indique, est un jeu que l'on pratique tout seul ; il appartient à la catégorie du casse-tête comme le Sudoku, le Taquin ou le cube de Rubik et se prête assez bien à une approche mathématique. Aussi quelques mathématiciens comme Lucas, Hermary et Reiss, au XIX^e siècle, et, plus près de nous, John Conway et de Bruijn, s'y sont intéressés. Son origine est obscure.

Lucas cite une source selon laquelle ce jeu aurait été inventé par un voyageur français qui regardait des sauvages planter leurs flèches, au retour de la chasse, dans des trous régulièrement disposés sur la paroi de leurs cabanes ; d'autres l'attribuent à un prisonnier de la Bastille de la fin du XVII^e siècle.

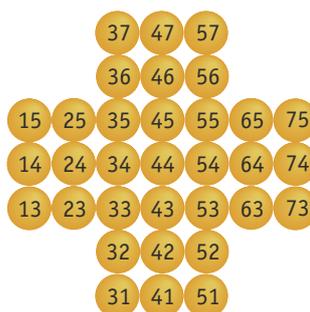
Quoi qu'il en soit, il apparaît sur une gravure de la princesse de Soubise en 1697 et Pierre Remond de Montmort en traite dans son *Essai d'analyse des jeux de hasard* en 1708. Plus étonnant, le philosophe Leibniz le mentionne dans un mémoire de 1710, sur lequel nous reviendrons plus loin. Il a connu une grande vogue aux XVIII^e et XIX^e siècles et fait aujourd'hui partie intégrante de toute boîte de jeux de société. Enfin, ce jeu se prête à des réalisations esthétiques, ce qui en fait un cadeau apprécié, mais les pratiquants sont moins nombreux.

Le jeu du solitaire a la forme d'une planchette octogonale ou circulaire comportant un certain nombre de trous

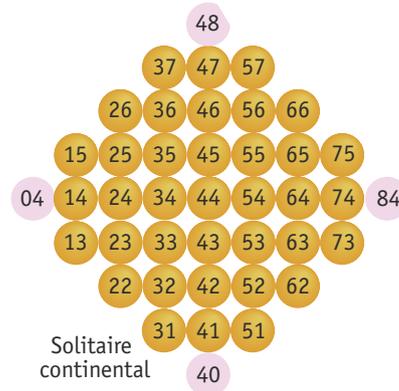
1. QUELQUES PROBLÈMES sur le solitaire français. Les cases de départ vides sont en gris.



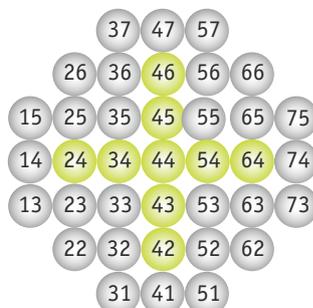
Solitaire français



Solitaire anglais et allemand



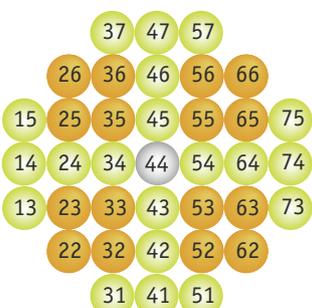
Solitaire continental



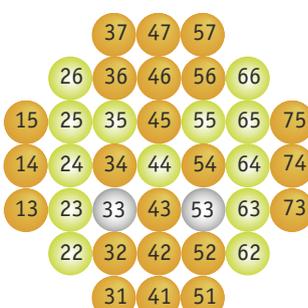
Croix latine



Triangle



Croix de Malte



Lettre M

ou d'alvéoles, aux nœuds d'un réseau carré. Il en existe deux variantes principales : le solitaire français à 37 cases et le solitaire anglais ou allemand comportant 33 cases, celles du solitaire français moins les cases 22, 26, 62 et 66 (notations qui seront précisées plus loin). Il existe une troisième variante non commercialisée, appelée solitaire continental, comportant 41 cases, soit les 37 du solitaire français plus les quatre cases en rose (voir la figure 1, en haut à droite).

Au départ, tous les trous ou les alvéoles sont garnis d'une fiche cylindrique ou d'une boule, en général en bois et, pour les solitaires anciens luxueux, en ivoire. La règle du jeu est simple : une boule ne peut se déplacer horizontalement ou verticalement que vers une case vide en sautant par-dessus une et une seule case occupée dont on retire la boule après le saut, comme dans la prise au jeu de dames. Naturellement, au départ, il faut qu'il existe une ou plusieurs cases de vide pour que le jeu commence.

Les figures du solitaire

Les buts du jeu sont de deux types : les réussites et la création de figures. Parmi les réussites, la complète (la plus difficile) consiste à ôter une boule au départ, puis, par le jeu des sauts, à terminer avec une seule boule sur le solitaire, éventuellement sur une case précisée à l'avance. Les réussites partielles ont pour point de départ une figure de boules que l'on doit réduire à une seule, par exemple la croix latine et le triangle, illustrés sur les deux solitaires du bas de la figure 1. Dans le deuxième type de problème, on part du solitaire moins une ou deux boules, selon les cas, et l'on doit, par le jeu des sauts, faire apparaître une figure choisie à l'avance, comme les deux exemples des solitaires *c* et *d* du bas de la figure 1 : la croix de Malte (à partir de la case 44 vide) et la lettre M (à partir des deux cases 33 et 53 vides).

Comme aux échecs ou aux dames, il faut une notation pour indiquer les coups. Nous prendrons celle de Lucas, qui correspond aux nombres inscrits dans les cases. Ces nombres de deux chiffres ne sont pas mystérieux ; ils correspondent aux coordonnées entières x et y des carrés du réseau carré, l'origine étant dans le coin, en bas et à gauche. Mathématiquement, il aurait été plus naturel de prendre l'origine sur la case centrale, mais cela aurait fait intervenir des nombres négatifs qui, typographiquement, sont moins agréables. Avec ces notations, on représente un saut par une fraction dont le numérateur indique la case de départ de la boule et le dénominateur la case d'arrivée (auparavant vide), étant sous-entendu que la boule de la case sautée a été retirée. Ainsi, le coup 33/53 indique que l'on a fait passer la boule de la case 33 sur la case vide 53 et que l'on a retiré la boule de la case 43. Toujours à l'aide de cette notation, les seuls coups légaux à partir de la case 33 sont 33/53, 33/35, 33/13 et 33/31 (les cases d'arrivée étant bien sûr vides).

À titre d'exemple, voici la solution en huit coups du problème de la croix latine : 43/41, 45/43, 24/44, 44/42, 64/44, 41/43, 43/45, 46/44. Cet exemple, comme celui du triangle, est très simple, mais il est bon de s'entraîner dessus avant de s'attaquer au problème de la croix de Malte (en 15 sauts) ou de la lettre M en 22 sauts, dont les solutions sont données en fin d'article. Le nombre de sauts nécessaires

pour obtenir une figure donnée est égal à la différence entre le nombre de boules au départ et à l'arrivée. Le solitaire se prête à une multitude de problèmes dont beaucoup sont des classiques pour lesquels des solutions ont été décrites. Le but de cet article n'est pas une compilation de ces problèmes, aussi je renvoie le lecteur intéressé à la bibliographie.

Dans les lignes qui suivent, je voudrais examiner le problème suivant : étant donné deux configurations de boules sur le solitaire, peut-on passer de l'une à l'autre en suivant la règle du jeu ? Comme nous le verrons, la réponse ne sera que partielle, mais elle aura au moins l'avantage d'éliminer *a priori* un certain nombre de problèmes impossibles, ce qui n'est déjà pas si mal. La méthode que je vais décrire est due au mathématicien hollandais N. de Bruijn et n'est autre qu'une variante moderne de l'étude de Reiss et Hermary au XIX^e siècle. L'idée essentielle est de considérer un coup comme une transformation de la configuration S_1 à la configuration finale S_2 et de chercher une quantité ou une propriété attachée à la configuration qui soit conservée lors de cette transformation. En effet, si la quantité liée à la configuration S_1 diffère de celle de la configuration S_2 et que cette quantité est invariante par un coup légal, on en déduira immédiatement que le passage de la configuration S_1 à la configuration S_2 est impossible par une suite de coups légaux. Cette approche est ce que l'on appelle en mathématiques la recherche d'un invariant, approche qui se révèle souvent féconde. Toute la difficulté réside dans la découverte ou la construction de cet invariant.

+	0	1	p	q
0	0	1	p	q
1	1	0	q	p
p	p	q	0	1
q	q	p	1	0

Table d'addition dans GF4

L'obtention de l'invariant

Dans le cas qui nous intéresse, nous utiliserons un objet mathématique un peu « exotique » : un corps fini à quatre éléments noté GF4. Pas d'affolement, ce n'est pas très difficile : vous calculez tous les jours dans un corps bien plus compliqué, celui des nombres réels ; et bien, pour ce corps à quatre éléments, 0, 1, p et q , les règles de calcul sont les mêmes, simplement les tables d'addition et de multiplication sont différentes et indiquées ci-contre.

Ainsi, si l'on regarde la table d'addition, on voit que $1 + 1 = p + p = q + q = 0$, que l'on peut réécrire : $1 = -1$, $p = -p$, $q = -q$, c'est-à-dire que l'on n'a pas à se préoccuper du signe des nombres ! Attention, le nombre 1 utilisé ici est celui du corps GF4 et non le nombre 1 avec lequel on calcule tous les jours.

D'autre part, la table de multiplication nous donne les deux relations $p \times p = p^2 = q$ et $p \times q = 1$, $p^3 = p \times p^2 = p \times q = 1$. Dès lors, il est facile de calculer la valeur d'une puissance quelconque de p . En effet, si l'exposant n est un multiple de 3, soit $n = 3^k$, on a $p^n = p^{3^k} = (p^3)^k = 1^k = 1$; si $n = 3k + 1$, $p^{3k+1} = p^{3k} \times p^1 = 1 \times p = p$. Enfin, si $n = 3k + 2$, $p^{3k+2} = p^{3k} \times p^2 = 1 \times p^2 = q$.

Pour le nombre q , les relations sont les mêmes après échange de p et q . Enfin, d'après la table d'addition, on a : $p + q = 1$,

×	0	1	p	q
0	0	0	0	0
1	0	1	p	q
p	0	p	q	1
q	0	q	1	p

Table de multiplication dans GF4

que l'on peut écrire (car $1 = -1$) $1 + p + q = 0$, ou encore : $1 + p + p^2 = 0$. Cette dernière relation est le « truc » qui va nous permettre de construire l'invariant recherché. Associons à une configuration S_1 de boules sur le solitaire la somme $A(S_1)$ des nombres p^{x+y} , où x et y sont les coordonnées des cases occupées par les boules. Ainsi, s'il n'y a que les trois cases 34, 44 et 64 d'occupées, cette somme vaut $A = p^{3+4} + p^{4+4} + p^{6+4} = p^7 + p^8 + p^{10} = p + q + q = p$.

Que devient cette somme lorsque l'on effectue un saut légal, par exemple horizontal vers la droite à partir de la case (x, y) ? La case sautée $(x+1, y)$ est vidée, de même que la case de départ (x, y) , tandis que la case $(x+2, y)$ est occupée : donc la somme $A(S_1)$ a varié de $-p^{x+y} - p^{x+1+y} + p^{x+2+y}$, que l'on peut écrire en mettant p^{x+y} en facteur : $p^{x+y}(1 - p - p^2) = p^{x+y}(1 + p + p^2) = 0$. Nous avons notre invariant ! La somme $A(S_1)$ associée à la configuration reste constante après un coup légal. (Le lecteur vérifiera facilement que c'est aussi vrai pour les coups légaux dans les trois autres directions.)

On peut construire une deuxième quantité $B(S_1)$ en sommant les nombres p^{x-y} des cases occupées, quantité qui, elle aussi, est invariante après un coup légal. Ainsi, une configuration est caractérisée par deux nombres (A, B) dans le corps GF_4 , qui restent constants au cours de la partie. Ces deux nombres pouvant prendre les quatre valeurs 0, 1, p et q , les configurations du solitaire sont réparties en 16 classes. Si deux configurations appartiennent à des classes différentes (c'est-à-dire différent par l'un des deux nombres A ou B), on ne pourra pas passer de l'une à l'autre par des coups légaux, et le problème associé sur le solitaire sera impossible. Mais, attention, cette condition n'est que nécessaire, car si un problème est théoriquement possible (l'invariant est le même), il peut être pratiquement impossible.

Prenons par exemple quatre boules sur les cases 33, 35, 55, 53. Les invariants A et B pour cette position sont : $A = p^6 + p^8 + p^{10} + p^8 = 1 + p = q$, $B = p^0 + p^{-2} + p^0 + p^2 = p + q = 1$. Prenons maintenant une seule boule en 44. Les invariants associés sont $A = p^8 = q$ et $B = p^0 = 1$.

Par conséquent, le passage des quatre boules en carré à une seule boule en 44 est théoriquement possible, mais pratiquement impossible. C'est le point faible de cette analyse qui

nous permet seulement d'affirmer l'impossibilité d'un problème de solitaire et, dans les autres cas, la seule façon de démontrer qu'il est possible de construire effectivement la suite des sauts.

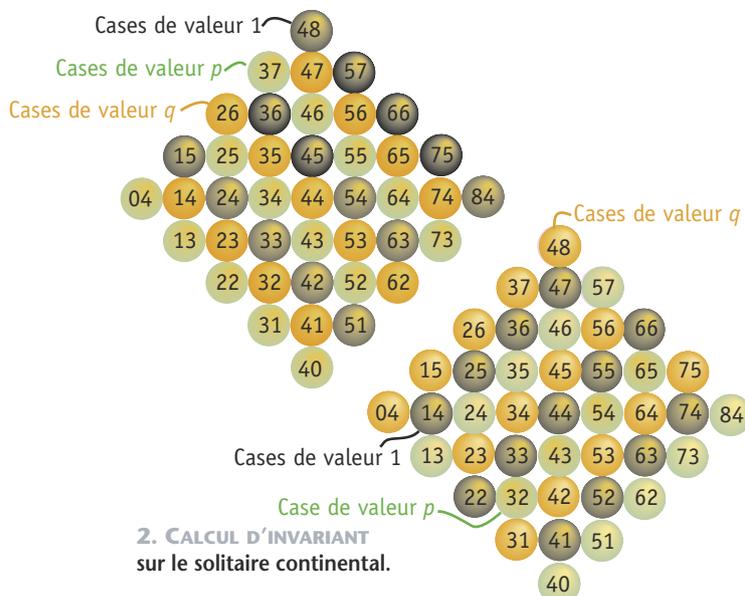
Avant d'appliquer cette analyse à quelques grands classiques du solitaire, faisons quelques remarques. Cette méthode est universelle en ce sens qu'elle s'applique à des solitaires de formes quelconques et de nombre de cases quelconque. Elle s'applique encore sur un solitaire à trois dimensions ; en revanche, si l'on autorise les sauts en diagonale, la méthode s'effondre, car l'invariance des sommes n'est plus conservée par ces sauts. Existe-t-il un ou des invariants pour cette règle généralisée ? Le problème est ouvert.

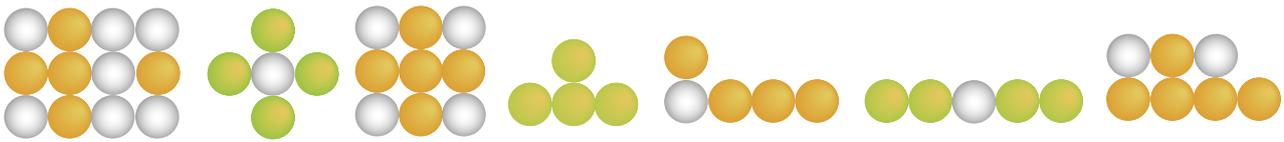
Pour le lecteur qui serait un peu rebuté par ces calculs, nous avons indiqué les valeurs de chaque case pour le calcul de l'invariant A ou B (voir la figure 2). Pour obtenir l'invariant d'une configuration, on compte le nombre de cases occupées de valeur p (resp $q, 1$) : si ce nombre est pair, la contribution à l'invariant est nulle et, dans le cas contraire, c'est p (resp $q, 1$), et de terminer le calcul en additionnant les trois nombres obtenus selon la table d'addition du groupe fini GF_4 .

La réussite complète

Étudions maintenant la réussite complète (c'est-à-dire la réduction de tout le solitaire moins une boule à une seule boule) sur les solitaires anglais, français et continental. Remarquons tout d'abord que les invariants A et B associés au solitaire plein sont $(q, 1)$ pour les solitaires français ou continental et $(0, 0)$ pour le solitaire anglais. Dès lors, pour obtenir les invariants du solitaire moins une boule, il suffit d'ajouter à ces nombres (car soustraire est équivalent à ajouter dans GF_4) les valeurs de la case vide pour chaque invariant. Ainsi, sur le solitaire anglais, les invariants A et B du solitaire moins une boule seront identiques aux invariants de cette seule boule, et la réussite complète, en revenant à la case vide initiale, sera toujours théoriquement possible. En revanche, sur les solitaires français ou continental, si l'on retire une boule d'une case, les invariants A et B de cette configuration seront nécessairement différents des invariants de l'unique boule sur cette même case, car les invariants du solitaire complet sont différents de 0. On en déduit que, sur ces solitaires, on ne peut faire la réussite complète en terminant sur la case de départ. De même, si l'un des invariants de la configuration de départ est nul, le problème sera impossible, car aucune boule n'a de valeur 0.

Quelles sont les réussites théoriquement possibles sur le solitaire français ou continental ? Pour les obtenir, nous ne sommes pas tenus d'étudier toutes les cases du solitaire, car il présente quatre axes de symétrie (vertical, horizontal et les deux diagonales) et il nous suffit d'étudier les cases 40, 41, 42, 43, 44, 51, 52, 53 et 62. Prenons par exemple le solitaire avec la case 41 vide et notons $A(41^*)$ et $B(41^*)$ ses invariants (l'astérisque indique que c'est le solitaire moins la boule de la case 41, alors que $A(41)$ désigne, au contraire, un solitaire avec, sur la case 41, la seule boule). On a $A(41^*) = q + q = 0$ et $B(41^*) = 1 + 1 = 0$. Comme $A(41) = 0$, mais $B(41) = 1$, la réussite est impossible avec la case 41 en fin de procédure. D'ailleurs aucune case ne convient, car aucune n'a deux invariants nuls. Il en est de même pour les





3. CONFIGURATIONS PIÈGES non réductibles à une boule pour quatre ou cinq boules.

cases 44, 53, 62, 63. Pour les trois autres cases, 42, 43, 51, du solitaire français (plus la case 40 pour le solitaire continental), la réussite est théoriquement possible, et l'on peut même préciser les cases d'arrivée possibles de la dernière boule. Ainsi, si l'on enlève la boule de la case 43, on a $A(43^*) = q + p = 1$ et $B(43^*) = 1 + p = q$, et la case d'arrivée de la réussite ne pourra être qu'une case de valeur 1 pour A et de valeur q pour B , soit les cases 42, 15, 45 et 75.

Ces impossibilités théoriques étant établies, qu'en est-il des possibilités théoriques sur le plan pratique? Sur le solitaire anglais, on a montré (en effectuant la réussite) que toutes les réussites théoriques possibles l'étaient pratiquement en terminant sur toutes les cases possibles théoriquement. On peut d'ailleurs connaître ces cases par une règle simple : ce sont celles, en plus de la case de départ, que l'on peut atteindre à partir de cette case de départ en sautant de deux cases en deux cases, soit horizontalement, soit verticalement, sans sortir du solitaire. Ainsi, de la case 32, on peut aboutir aux cases 32, 35, 65 et 62. Sur le solitaire français, parmi les dix possibilités théoriques fondamentalement différentes, sept ont été résolues pratiquement, mais il en reste trois dont je ne connais ni la possibilité ni l'impossibilité.

Autre impossibilité

Pour le solitaire continental, il existe un critère supplémentaire d'impossibilité que nous allons examiner. Considérons les cases du solitaire coloriées en noir et blanc comme sur un échiquier, la case 44 étant noire. À chaque saut du solitaire, une boule ne peut prendre que les boules des cases de couleur opposée à la sienne. Mais le solitaire continental à 41 cases comporte 16 cases blanches et 16 cases noires sur le pourtour. Si l'on prend une case blanche comme case de départ de la réussite, il reste 15 boules sur les cases blanches et 16 boules sur les cases noires du pourtour. D'autre part, les boules situées sur les cases noires du pourtour ne peuvent être prises avant d'avoir été déplacées, c'est-à-dire avant d'avoir pris un nombre de boules au moins égal situées sur des cases blanches.

Par conséquent, quelle que soit la manœuvre, il restera au moins deux boules sur les cases noires du pourtour. Ainsi, sur le solitaire à 41 cases, la case 43 blanche, théoriquement possible sur la base des deux invariants A et B , est en fait impossible. De même, la case 40, bien que noire, est aussi impossible, car, après le premier coup forcé 42/40, on est ramené au cas précédent. En fait, sur les sept réussites fondamentalement différentes possibles, quatre ont été trouvées, mais il en reste trois ambiguës.

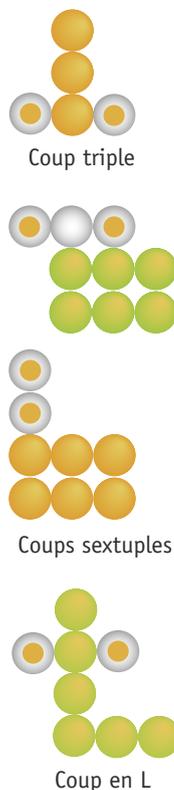
Ce critère d'impossibilité n'est pas propre au solitaire à 41 cases, mais peut s'appliquer à un solitaire de forme quelconque et peut s'énoncer ainsi : lors-

qu'un solitaire contient des cases de même couleur garnies de boules qui ne peuvent être prises qu'après avoir été déplacées et que le nombre de ces cases n'est pas plus petit que celui des cases de couleur opposée, la réussite est impossible en prenant pour case initiale une case de cette couleur opposée.

On peut naturellement se poser des réussites avec deux cases initiales vides. Sur le solitaire anglais, on a le résultat suivant : si la réussite doit se terminer sur les cases de départ (avant le dernier coup), les problèmes sont tous « théoriquement » possibles, mais en pratique quatre (aux symétries près) sont impossibles pratiquement : ce sont (41, 42), (42, 44), (42, 64) et (42, 46). Toujours sur le solitaire anglais, les réussites avec trois cases vides ont été étudiées, et je renvoie le lecteur intéressé au livre de J. Conway cité en bibliographie. Quant au solitaire français, à ma connaissance, aucune étude n'a été faite.

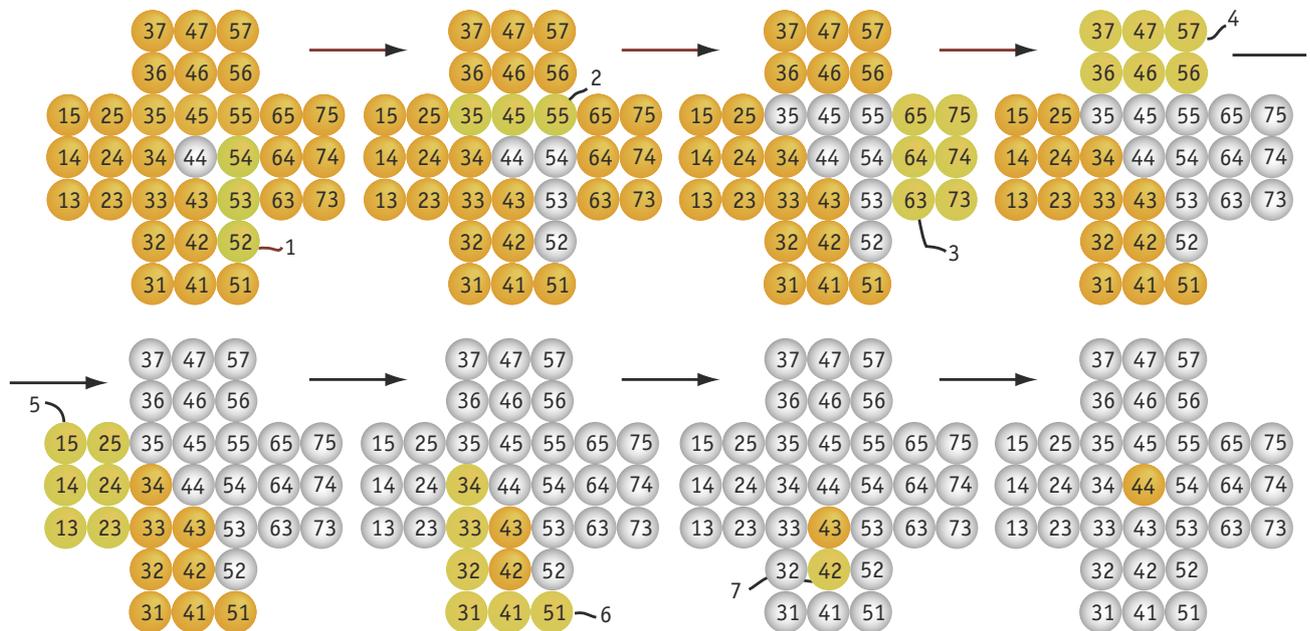
Résolution pratique

Maintenant que nous savons déterminer si un problème est théoriquement possible, intéressons-nous à quelques aspects pratiques de la résolution d'un problème. Il faut d'abord savoir reconnaître les configurations irréductibles à une seule boule que l'on doit absolument éviter pour mener à bien une réussite. Hormis les configurations évidentes de plus de deux boules alignées, la figure 3 ci-dessus en présente quelques-unes à quatre et cinq boules. Il faut aussi éviter de bloquer des boules sur le pourtour du solitaire.



À ce sujet, il y a un problème amusant sur le solitaire anglais à case centrale 44 vide : quel est le nombre minimal de sauts qu'il faut faire pour se bloquer totalement (sans sauts possibles)? La solution est donnée en fin d'article. Dans le cas du solitaire français, il y a une possibilité théorique de 11 sauts pour avoir la configuration formée du pourtour plus les deux axes de symétrie horizontal et vertical occupés, mais le meilleur résultat pratique est de 15 sauts pour aboutir au pourtour du solitaire et l'axe horizontal.

Inversement, il faut savoir reconnaître des positions classiques permettant d'enlever trois ou six boules, que l'on appelle coup triple, sextuple ou en L (voir la figure ci-contre). Dans chaque cas, il faut que l'une des cases en gris à point orange soit occupée, tandis que l'autre est vide. Je laisse le soin au lecteur de trouver ces mouvements simples, et il constatera que dans chaque cas, après avoir enlevé toutes les boules colorées, on se retrouve avec une boule sur la case grisée/orange qui était occupée au départ, d'où le nom de catalyseur donné à ces cases. Quand le joueur de solitaire chevronné rencontre ces configurations, il ne fait plus les sauts, mais enlève directement les boules concernées. Ainsi, la réussite du solitaire anglais décentré peut se faire en deux coups



4. RÉSOLUTION DU SOLITAIRE ANGLAIS à l'aide de coups multiples (deux coups triples, trois coups sextuples, un coup en L et un saut simple).

triples, suivis de trois sextuples et d'un en L, pour terminer par un saut simple (voir la figure 4).

Si la résolution d'un problème de solitaire ne vous pose plus de difficultés, vous pouvez passer, comme les virtuoses, à la recherche du minimum de mouvements pour le faire. On appelle mouvement une suite continue de sauts avec la même boule. Ainsi 34/54, 25/45, 54/56 représentent trois mouvements, tandis que 34/54, 54/56, 56/36 ne comptent que pour un seul mouvement. Les tableaux ci-dessous indiquent les records pour les différentes réussites complètes. Ils se lisent facilement : les nombres de la première ligne du haut et de la première colonne de gauche sont les numéros des cases de départ et d'arrivée (ou *vice versa*), et le nombre à l'intersection des lignes et colonnes correspondantes est le nombre minimum de mouvements pour faire cette réussite.

Ainsi, la réussite 44→44 sur le solitaire anglais peut se faire en 18 mouvements. Cette réussite, découverte en 1912 par Bergholt, constitue le seul record absolu : en 1964, Bersley a démontré qu'on ne pouvait faire mieux. Pour le solitaire à 41 cases, trois réussites théoriquement possibles (marquées d'un point d'interrogation) n'ont toujours pas été réalisées en 2008 à ma connaissance. Pour le solitaire français, un lecteur suisse, Alain Maye, a réalisé en janvier 1986 les neuf réussites possibles en un nombre de mouvements compris entre 23 et

25. Puis, insatisfait, il les a réussies en juin 1987 en 21 mouvements et même 20 pour la 42-13. Pour les solitaires français et anglais, les résultats semblent optimaux, et le défi du XXI^e siècle reste le solitaire continental.

CASES	51	41	52	42	53	43	44
51	16						
54	16						
57	16						
24	17						
41		18					
44		18					
47		18					
74		17					
52			16				
55			15				
35			16				
42				19			
45				17			
75				17			
53					15		
56					16		
43						16	
73						16	
46						17	
44							18
41							18

Solitaire anglais

CASES	42	43	51
13	20		
43	21		
46	21		
42		21	
15		21	
45		21	
31			21
34			21
64			21
37			21

Solitaire français

CASES	42	51
13	37	
43	?	
46	38	
31		38
34		?
64		38
37		?

Solitaire continental

Le jeu de Leibniz

Dans la variante de Leibniz du solitaire, on part d'une case occupée et on remplit les cases du solitaire par des sauts additifs, c'est-à-dire qu'une boule ne peut sauter que par-dessus une case vide que l'on remplit après le saut.

La théorie de cette variante est strictement identique à celle du solitaire à sauts soustractifs, car dans GF4, tout nombre est égal à son opposé et, connaissant une solution d'une réussite par sauts soustractifs, il est facile, en inversant les coups, d'obtenir une solution de la réussite à sauts additifs. En combinant les deux règles, il se pose un problème intéressant. Peut-on passer d'une figure à une autre (comportant le même nombre de boules) en combinant sauts soustractifs et sauts additifs, ces derniers n'étant possibles que si l'on dispose de boules enlevées par des sauts soustractifs précédents ? Oui, en principe, si les configurations appartiennent à la même classe ; ainsi on peut passer de la croix latine de la figure 1a au triangle de la figure 1b en réduisant la croix latine à une boule en 44 par sauts soustractifs et en reconstruisant le triangle à partir de la case 44 par sauts additifs. Mais peut-on le faire en moins de $2(n-1)$ sauts (n étant le nombre de boules d'une des figures) ? À vous de jouer !

Pierre TOUGNE adressera la solution des réussites indiquées aux lecteurs qui la lui demanderont par courriel (pierre.tougne@noos.fr).

<http://eternitygames.free.fr/Solitaire.html>.

R. BERLEKAMP, H. CONWAY et R. GUY, *Winning Ways*, Academic Press, 1982.

E. LUCAS, *Les récréations mathématiques*, tome 1, Blanchard, 1977.

J. CABERA et R. HOUT, *Traité du jeu de solitaire*, Flammarion, 1977.

Solutions

Croix de Malte : 24/44, 54/34, 74/54, 42/44, 44/64, 46/44, 34/54, 54/74, 62/42, 63/43, 32/34, 22/24, 25/45, 26/46, 56/54, 66/64.

Lettre M : 55/53, 13/33, 43/23, 63/43, 51/53, 43/63, 35/33, 23/43, 31/33, 43/23, 41/43, 15/13, 13/33, 43/23, 75/55, 73/75, 45/65, 75/55, 47/45, 45/65, 37/35, 57/55.

Pour se bloquer sur le solitaire anglais décentré, il suffit des six coups suivants : 46/44, 43/45, 41/43, 24/44, 54/34, 74/54.

Sprouts en herbe

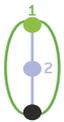
Philippe BOULANGER

Le jeu de *Sprouts* (« germe », en anglais) peut-il être analysé théoriquement dans toutes ses possibilités ? Jouez-y et vous deviendrez vite un maître.

Le jeu de *Sprouts*, comme nombre de jeux de nature mathématique, a été inventé par John Horton Conway associé à Michael Paterson. Ce grand mathématicien anglais qui a contribué à tant de domaines des mathématiques commençait ses journées en inventant ou en résolvant un jeu mathématique.

Ce jeu à deux joueurs se joue avec du crayon et du papier. Dans la position de départ, il y a n points sur une feuille de papier. Chaque joueur, à tour de rôle, ajoute un point et joint ce point par deux arcs à deux points déjà tracés. Les deux contraintes sont que deux portions d'arcs ne peuvent se couper et que d'un point ne peuvent partir que trois arcs (chaque arc n'a que trois « vies »). Le perdant dans la version classique est celui qui ne peut plus jouer de coup légal ; dans la version « Qui perd gagne », le joueur qui ne peut plus jouer a gagné.

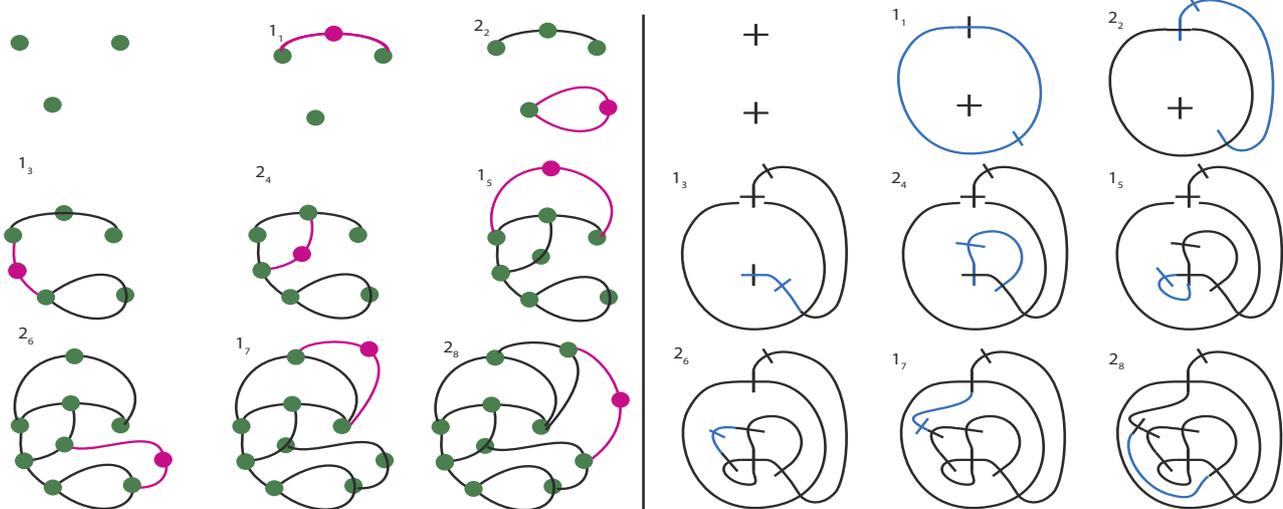
Il est clair que la partie classique se finit en au plus $3n$ coups, car chaque tracé d'un arc élimine deux vies et en crée une. En fait, une partie se termine en au plus $3n - 1$ coups, car le dernier coup ajoute une vie qui reste isolée. Il est aisé de voir que chaque partie dure au moins $2n$ coups en traçant pour chaque point les deux arcs indiqués sur le dessin à gauche. Aussi une partie avec trois points au départ se termine après au plus huit coups et dure au moins six coups.



Le nombre de configurations est topologiquement difficile à décrire et la formulation d'une stratégie gagnante est délicate. En analysant toutes les successions de coups possibles, il a été démontré que le jeu classique est gagnant pour le premier joueur quand il y a trois, quatre et cinq points au départ et, pour le second joueur avec un, deux et six points. Une conjecture n'est pas prouvée, mais vérifiée par les programmes de jeu : une partie est gagnante pour le premier joueur quand le reste de la division par 6 du nombre initial de points est égal à trois, quatre ou cinq. Julien Lemoine et Simon Viennot ont vérifié cette règle jusqu'à 32 points.

Depuis sa création en 1967, le jeu a beaucoup évolué et il existe un site dévolu aux tournois et aux théories de *Sprouts* : <http://www.geocities.com/chessdp/index1.htm>

Une variante de *Sprouts*, dénommée *Brussels Sprouts*, est, nous le verrons, dans les choux... et pourtant ses règles sont très proches de *Sprouts*. Une partie commence avec un nombre de croix, par exemple deux comme représenté sur la figure ci-dessous. Chaque coup relie deux segments libres et ajoute une branche de croix sur l'arc ajouté avec les mêmes interdits que dans *Sprouts*. Ce jeu, quelle que soit la tactique, se termine en $5n - 2$ coups. Si le jeu démarre avec un nombre pair de points, la partie est automatiquement gagnante pour le premier joueur, et gagnante pour le second joueur pour un nombre impair de points de départ.



PARTIES DE *SPROUTS* avec trois points (à gauche) et partie de *Brussels Sprouts* à deux croix (à droite).

Du taquin à l'âne rouge

Jean-Paul DELAHAYE

Les casse-tête à pièces coulissantes, étudiés depuis des décennies, sont mieux compris : on sait pourquoi il est si difficile de les résoudre.



En 1878, Sam Loyd, grand amateur et créateur d'énigmes mathématiques, proposa une récompense de mille dollars à la première personne qui réussirait à remettre en ordre une série de 15 pièces coulissantes de forme carrée disposées dans un cadre carré de 16 places. L'espace vide permet de faire coulisser les pièces, et la solution semblait assurée. Le casse-tête, qui connut un succès phénoménal dans le monde entier, porte aujourd'hui le nom de *Taquin* dans les pays francophones. La position de départ est à gauche et la position visée pour le défi proposé par Sam Loyd est à droite :



Le but consistait à remettre le 14 et le 15 en bon ordre, c'est-à-dire de la position de gauche à celle de droite, d'où le nom anglophone du jeu : *14-15 puzzle* ou *15-puzzle* (nom à utiliser pour vos recherches sur Internet). Le défi, inspiré d'un jeu analogue vendu une dizaine d'années auparavant par la Société *Embossing Company* de New York, était sans risque pour Sam Loyd, car il est impossible de remettre en ordre les pièces sans démonter le casse-tête, ce qui, bien sûr, n'est pas permis. Cette impossibilité est démontrée dans l'encadré de la page 84.

Le succès du jeu suggéra une série d'autres casse-tête où le même principe est adopté, mais où l'on utilise des pièces de tailles et de formes différentes et souvent un espace vide de plusieurs carrés. Ces casse-tête à pièces coulissantes sont difficiles : on peut tourner en rond des heures avant d'arriver à la solution. Parfois même, on se persuade à tort qu'aucune solution n'existe. La figure 1 ci-contre en propose une série. Pour y jouer sans avoir à les acheter ou

à les fabriquer, allez voir : <http://www.puzzleworld.org/SlidingBlockPuzzles/default.htm>.

Martin Gardner présenta ces jeux en février 1964 dans sa rubrique de *Scientific American*. Il s'étonnait qu'aucune théorie n'en soit connue : « À moins de procéder par essais et erreurs, personne ne sait déterminer si, partant d'une position donnée, une configuration fixée comme but peut être atteinte ou non, et lorsque la réponse est oui, comment trouver le nombre minimum de déplacements permettant d'opérer le passage de l'une à l'autre. »

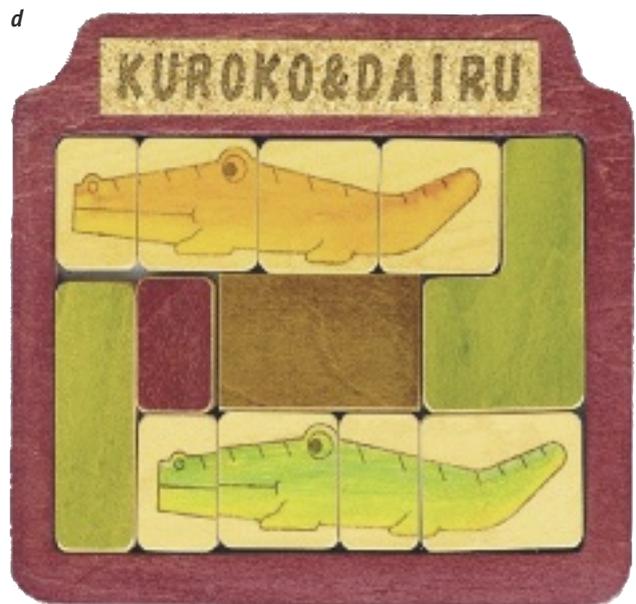
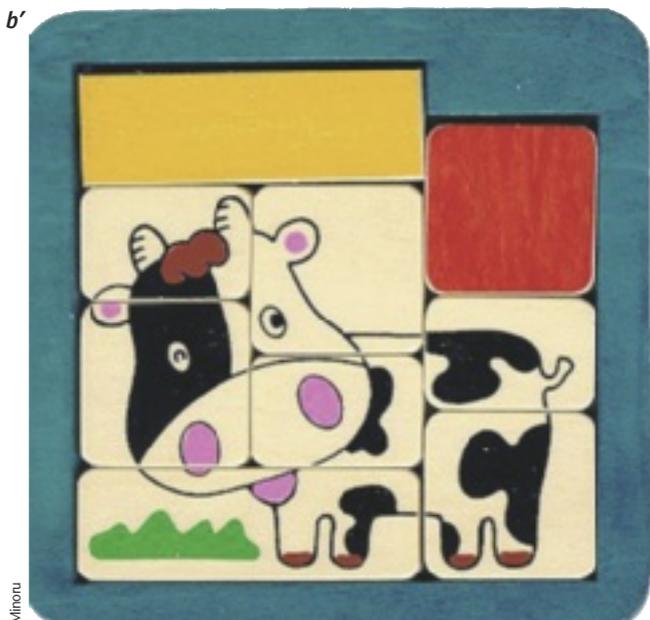
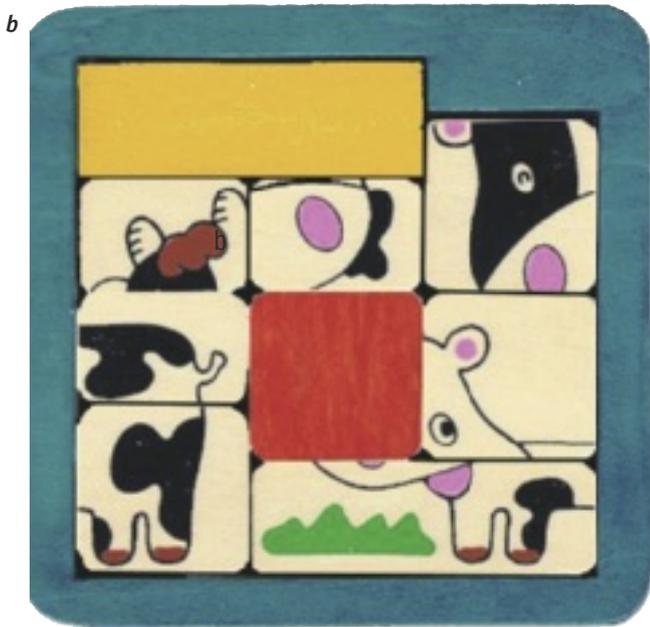
La raison de cette absence de méthode générale a été identifiée par Robert Hearn et Erik Demaine, qui ont montré que cette catégorie de casse-tête appartient à la classe des problèmes PSPACE-complets. Nous présenterons cette classe qui joue un rôle central en théorie de la complexité où, avec la classe des problèmes NP-complets (les problèmes complets de la classe NP des problèmes qu'on résout en temps polynomial à l'aide de tirages aléatoires chanceux) et la classe des problèmes P (problèmes qu'on peut résoudre en temps polynomial), elles constituent trois barreaux d'une échelle de mesure de la difficulté des jeux et des casse-tête et, plus généralement, de tous les problèmes algorithmiques.

Besoin d'espace ?

Un problème est dit PSPACE (ces lettres proviennent des mots *espace* et *polynomial*) si, pour le résoudre, la quantité de mémoire qu'utilisera l'ordinateur n'est pas trop importante. Plus précisément, un problème est PSPACE si :

1) il est possible de trouver un algorithme déterministe (c'est-à-dire n'utilisant pas de tirages au hasard) qui résout chaque cas du problème ;

2) et que cet algorithme, utilisant des données de taille n , n'emploie, pour stocker ses données intermédiaires, qu'une mémoire d'au plus $p(n)$ bits, où $p(n)$ est un polynôme en n , comme $7n$, $n^3 + 3n^2 + 5$ ou $n^{10} + 50n$.



1. CASSE-TÊTE À PIÈCES COULISSANTES. (a) Le casse-tête « 123 » : après avoir enlevé la pièce centrale rouge, vous devez permuter le 1 et le 3 (26 mouvements). (b) Un casse-tête de Minoru Abe : après avoir enlevé la pièce jaune, la vache doit être reformée en 39 mouvements (b'). (c) Le casse-tête « Ange et Satan » : après avoir enlevé la pièce verte, vous devez échanger les deux personnages (74 mouvements). (d) Le casse-tête Koruko : après avoir enlevé la pièce brune centrale, vous devez permuter seulement les deux pièces vertes (85 mouvements). Pour jouer avec ces puzzles, vous pouvez les confectionner en contreplaqué ou aller sur le site : <http://www.puzzleworld.org/SlidingBlockPuzzles/abe.htm>.

Par exemple, pour savoir si l'écriture en base 10 du carré d'un nombre entier a de n chiffres utilise le chiffre 7 (la réponse est OUI ou NON), vous pouvez suivre l'algorithme de multiplication appris à l'école pour calculer a^2 , puis regarder si le résultat comporte un 7. Par cette méthode, l'espace de mémoire que l'algorithme utilise est d'environ n^2 chiffres (un chiffre = un caractère = 8 bits), car pour disposer la multiplication de a par a , il faut écrire n lignes de calculs intermédiaires ayant chacune n ou $n + 1$ chiffres (chaque ligne correspond au produit de a par un chiffre), lignes qui sont ensuite additionnées. Le problème de savoir si l'écriture de a^2 utilise le 7 peut donc être résolu avec un espace de travail de taille d'environ n^2 (donc inférieur au polynôme $2n^2$), le problème est donc PSPACE.

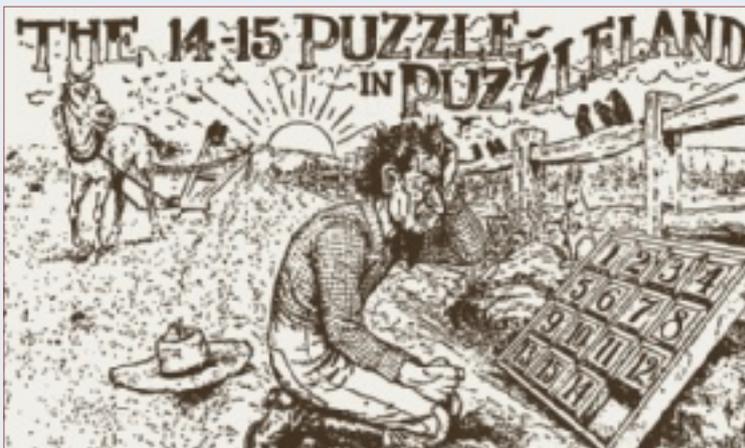
Certains problèmes PSPACE sont généraux dans le sens suivant : si on savait les résoudre efficacement, alors on saurait résoudre efficacement tous les problèmes PSPACE. Ces

problèmes PSPACE de difficulté maximale et auxquels tous les autres peuvent se ramener sont nommés PSPACE-complets.

L'exemple le plus simple et le plus important de problème PSPACE-complet a un nom barbare et intimidant : c'est celui des *formules booléennes quantifiées*. Ces formules sont la clef de la démonstration établissant que les casse-tête à pièces coulissantes sont PSPACE-complets. Voici deux exemples de formules booléennes quantifiées, et l'on cherche à déterminer si elles sont vraies ou non. La première est : (1) Il existe A , tel que pour tout B et pour tout C : $(A \text{ OU } B) \text{ ET } (A \text{ OU } C)$. La seconde est : (2) Pour tout A et pour tout B : $(A \text{ OU } B)$.

Les lettres A, B, C désignent des propositions logiques vraies ou fausses, et les formules auxquelles on s'intéresse ont toutes la même structure : des quantificateurs (« pour tout » et « il existe »), puis une formule de logique booléenne, c'est-à-dire avec des ET, des OU, des NON, des IMPLIQUE, etc.

1. LES 1 000 DOLLARS QUE SAM LOYD NE POUVAIT PAS PERDRE !



Pour la Science

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

On colorie les 16 cases en damier noir et blanc, avec une case noire en haut à gauche (donc celle en bas à droite est aussi en noir). On considère que la case vide est numérotée 16. Pour démontrer que le défi de Sam Loyd était impossible, on commence par une remarque astucieuse : dans une liste de nombres entiers tous différents, par exemple 1-3-6-5-8, quand on échange les positions de deux nombres, par exemple le 3 et le 8, ce qui donne 1-8-6-5-3, le nombre d'inversions (le nombre total de couples (a, b) où a est placé avant b dans la liste et a est supérieur à b) change de parité. Dans l'exemple, il passe de 1 [au départ il n'y a que l'inversion (6,5)] à 6 [après l'échange il y a (8,6), (8,5), (8,3), (6,5), (6,3), (5,3)], donc de impair à pair.

Voici la démonstration de la remarque astucieuse. Quand on échange a et b (présents dans la liste $\dots a \dots b \dots$), il y a une inversion nouvelle due au couple (a, b) si $a < b$ et une de moins si $a > b$, donc la parité du nombre d'inversions change à cause de ce couple. Nous allons voir que les autres nombres x de la liste ne créent aucun changement de parité du nombre d'inversions ; la remarque astucieuse sera donc établie. Soit x un nombre de la liste, trois cas sont possibles :

(1) x est placé en dehors de l'espace entre a et b ($\dots x \dots a \dots b \dots$ ou $\dots a \dots b \dots x \dots$) : lorsque l'on échange a et b , le nombre d'inversions quand on compare x avec a ou avec b reste le même.

(2) x est placé entre a et b ($\dots a \dots x \dots b \dots$) et est plus petit que a et b ou plus grand que a et b : le nombre d'inversions entre x et les deux nombres a et b est 1 et reste égal à 1, il ne change donc pas de parité ;

(3) x est placé entre a et b et a une valeur comprise entre celle de a et

celle de b : alors le nombre d'inversions créées par x en le comparant à a et b augmente de 2 si $a < b$ et diminue de 2 si $a > b$, et, là encore, ne change donc pas de parité.

Définissons maintenant la parité P d'une configuration du *Taquin* :

Case N : la case vide est noire. Nous notons P la parité du nombre d'inversions de la suite des cases (lues ligne à ligne, de haut en bas).

Case B : la case vide est blanche. P est l'opposé de la parité du nombre d'inversions (paire si elle est impaire, impaire si elle est paire).

Quand on fait un mouvement élémentaire (déplacement d'un pion du jeu en utilisant l'espace vide), la case vide est échangée avec une autre case et change de couleur : on passe de N à B ou de B à N , et le nombre d'inversions aussi change de parité (car on a échangé deux nombres de la liste), donc la parité P de la configuration reste identique. Donc, en partant d'une configuration paire, on ne peut atteindre que des configurations paires, et en partant d'une configuration impaire, on ne peut atteindre que des configurations impaires. En particulier, partant de la position initiale donnée par Sam Loyd, qui est impaire, on ne peut jamais arriver à celle qu'il demandait, qui est paire.

Un raisonnement complémentaire montre que la condition « avoir la même parité » entre deux configurations est non seulement nécessaire pour qu'on puisse passer de l'une à l'autre, mais est aussi suffisante. Du coup, savoir si l'on peut passer de telle configuration à telle autre avec un *Taquin* (même très grand) ne demande que peu de calculs (on évalue leur parité en comptant le nombre d'inversions des deux configurations et en regardant la couleur de la case vide).

La formule booléenne quantifiée (1) est une formule vraie, car si A est une proposition vraie, alors, que B le soit ou non, et que C le soit ou non, la formule $(A \text{ OU } B)$ ET $(A \text{ OU } C)$ est vraie. En revanche, la formule booléenne quantifiée (2) est une formule fausse, car si A est faux et que B est faux, alors $(A \text{ OU } B)$ est faux, et donc il n'est pas vrai en général que : pour tout A et pour tout B : $(A \text{ OU } B)$.

Certaines formules booléennes quantifiées ne peuvent être résolues qu'en menant des calculs assez longs, et le type de difficultés qu'on rencontre pour résoudre les formules booléennes quantifiées est très général, au point que tous les problèmes PSPACE s'y ramènent : si l'on sait traiter efficacement le problème des formules booléennes quantifiées, on résout efficacement tous les problèmes de la classe PSPACE.

De ce fait, on pense qu'il n'y a pas d'algorithme efficace (c'est-à-dire fonctionnant en temps polynomial) pour résoudre les problèmes PSPACE-complets. Démontrer qu'un problème est PSPACE-complet est donc considéré comme la preuve qu'il est impossible à résoudre rapidement. On sait que tout problème P (polynomial) est dans NP et que tout problème NP est dans PSPACE. Autrement dit, l'ensemble des problèmes P est inclus dans l'ensemble des problèmes NP, lui-même compris dans l'ensemble PSPACE.

On conjecture par ailleurs que ces trois classes de complexité sont toutes différentes et constituent trois barreaux dans l'échelle de la difficulté algorithmique. Retenons simplement de cela que :

(a) si on vous dit qu'un problème est dans la classe P , c'est qu'on peut le traiter rapidement et donc qu'il est envisageable de résoudre chaque cas particulier de ce problème, même lorsque la taille des données est grande ;

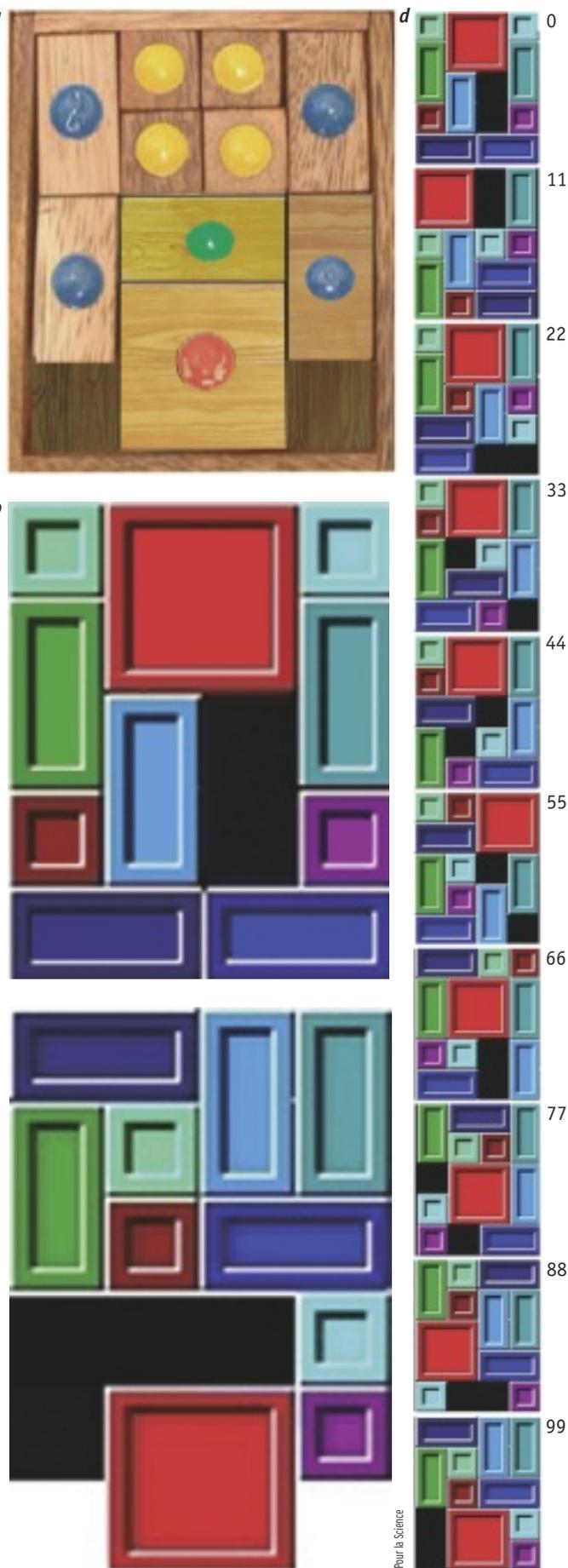
(b) si on vous dit qu'un problème est NP-complet, c'est que, sans doute, il ne peut pas être résolu de manière rapide, et, en conséquence, dès que les données sont volumineuses, aucun ordinateur ne peut le résoudre en un temps raisonnable ;

(c) si on vous dit qu'un problème est PSPACE-complet, c'est encore plus inquiétant : il faudrait sans aucun doute disposer d'un temps énorme pour faire fonctionner les algorithmes qui le résoudront, et cela, même quand la taille des données est petite.

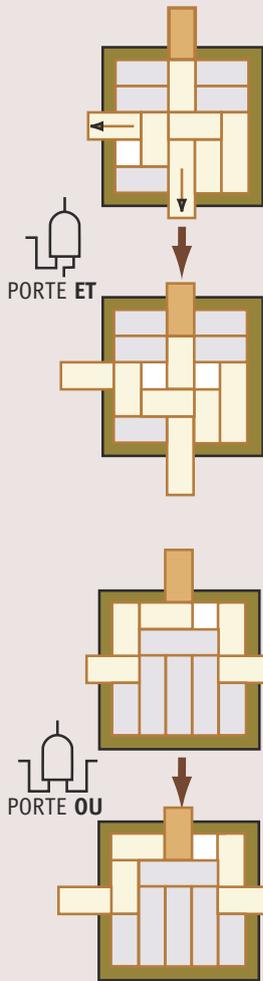
Passer des pièces carrées aux dominos 1×2 change tout

Les casse-tête à pièces coulissantes, selon qu'on autorise des formes de pièces carrées ou quelconques, définissent de beaux exemples pour illustrer ces trois barreaux de la complexité. Si vous considérez des jeux de *Taquin* composés de n lignes et m colonnes de pièces carrées coulissantes (toujours avec une seule case vide et des pièces carrées identiques), alors

2. L'ÂNE ROUGE, un des plus anciens casse-tête et un des plus récents de John Conway. L'âne rouge (a) est d'origine thaïlandaise : le but est de déplacer la pièce au bouton rouge afin de la mettre à la place des 4 pièces aux boutons jaunes : il faut 81 mouvements. Le casse-tête à pièces coulissantes de John Conway, où il faut passer de la configuration (b) à la configuration (c), est assez difficile (100 mouvements) ; pourtant le nombre de pièces est faible. Les étapes de la solution (d) sont indiquées tous les 11 mouvements.

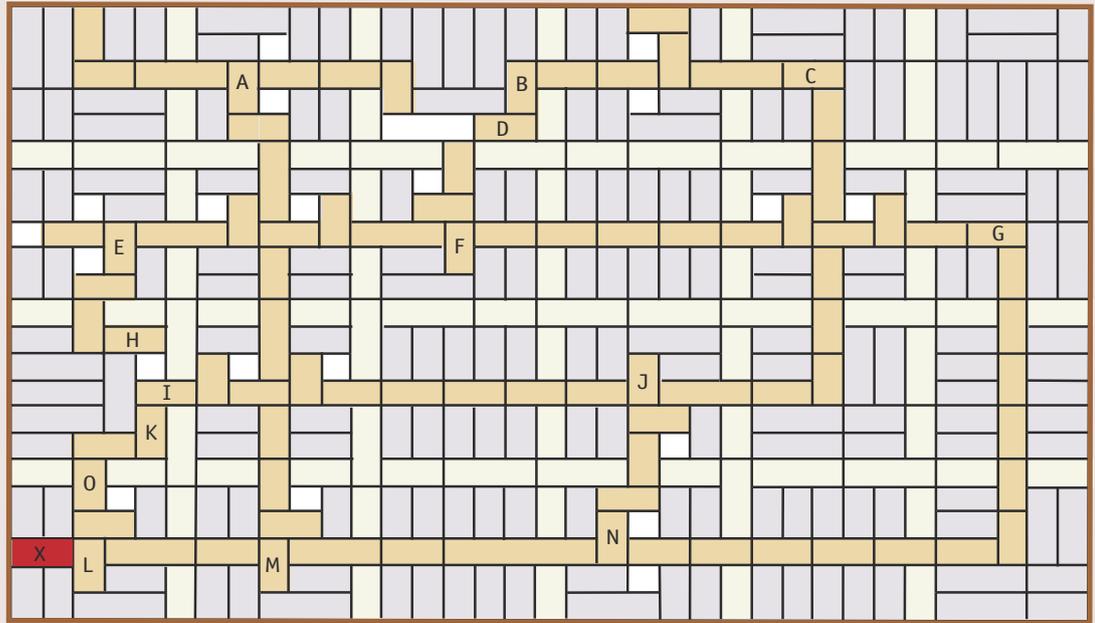


2. LES PORTES LOGIQUES À PIÈCES COULISSANTES



En utilisant des pièces coulissantes, on crée des portes logiques. Par exemple, le petit casse-tête en haut à gauche est une porte logique ET : la pièce en haut ne peut entrer d'un carreau dans le cadre que lorsque la pièce à gauche ET la pièce en bas sont sorties d'un carreau du cadre. De la même façon, il existe une porte logique OU : si l'une des pièces de droite ou de gauche entre dans le cadre d'un carreau, alors, nécessairement, la pièce du haut est en position sortie. La juxtaposition de ces portes (et d'autres) engendre des casse-tête complexes. Cela permet de « programmer » des casse-tête dont la résolution est équi-

valente à la recherche de la valeur vraie ou fausse d'une formule booléenne quantifiée et d'en déduire que le problème est PSPACE-complet. Ci-dessous, un exemple de casse-tête composé à partir de portes logiques où il faut déplacer la pièce X d'une case vers la droite. (Réponse: déplacer aussitôt que possible E vers la gauche, D vers la gauche, F vers le haut, D vers la gauche, N vers la droite, J vers le bas, C vers la gauche, I vers la droite, H vers la gauche, K vers le haut, J vers la gauche, B vers le haut, N vers le haut, F vers la droite, D vers la droite, A vers la droite, F vers le haut, G vers la gauche, M vers le haut, L vers le haut, X vers la droite.)



3. COMPLEXITÉ DES CASSE-TÊTE ET DES JEUX

A) Résoudre les **Cryptarithmes** est un problème NP-complet : dans un cryptarithme, il faut remplacer chaque lettre par un chiffre spécifique de manière à avoir une égalité exacte.

ARGENT + ARGENT = MALHEUR (Eric Angelini)
 DEUX + NEUF = ONZE (Nicolas Graner)
 QUART + QUART + QUART + QUART = ENTIER (Eric Angelini)
 TOI + LUI + ELLE = VOUS (Philippe Deschamp)
 NOIR + NOIR = BLANC (Michel Clavel)

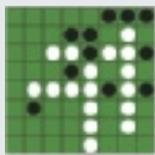
Emprunté à : <http://www.graner.net/nicolas/nombres/crypt.php>

Précisons que le problème des cryptarithmes n'est NP-complet que dans sa forme généralisée où la base de numération à utiliser peut être imposée différente de 10. En effet, lorsque la base est fixée à 10, quelle que soit la taille du problème, il n'y a que 10 ! tentatives à faire et donc un temps fini suffit (et donc le problème ne pourrait pas être NP-complet).

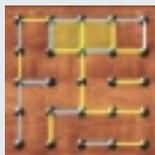
Pour classer les jeux classiques comme les échecs ou les dames, il faut d'abord en proposer des généralisations sur des damiers de tailles quelconques. Selon la façon dont on s'y prend (et qui est toujours un peu arbitraire : nouvelles pièces à inventer ?), la position de ces jeux sur l'échelle des

ARGENT
 + ARGENT

 MALHEUR



8	3	5	6	7	2	
2	9		4			
7			1	3	5	
1		7	2	5	3	
9			3	8	6	
6		4	9	2	8	
3	2			1		
4	6			5	7	
5	1	3	8	7	4	2



classes de complexité varie. Notons cependant qu'elle se situe toujours au niveau de NP-complet ou au-dessus.

B) Le jeu du **Sudoku** sur un tableau de taille $n^2 \times n^2$ a été démontré NP-complet par Takayuki Yato et Takahiro Seta (voir *Logique et calcul, Pour la science* n° 350, déc. 2005).

C) Le jeu des **petits carreaux** est NP-difficile (ce qui veut dire qu'il est au moins aussi difficile qu'un problème NP-complet, mais qu'il l'est peut-être plus) : http://en.wikipedia.org/wiki/Dots_and_Boxes

D) La recherche d'une solution au **Master-Mind** est NP-complet, voir : <http://membres.lycos.fr/fmaire/jeux/mastermind/mastermind.html>

E) La recherche du coup gagnant dans le jeu d'**Othello** (ou **Réversi**) est PSPACE-complet : <http://www.interjeux.net/jeux/othello/>

F) **Sokoban** (jeu où un personnage doit déplacer des obstacles qui encombrant un labyrinthe et les ranger dans les endroits indiqués : le personnage ne peut pousser qu'un seul obstacle à la fois et doit se placer derrière pour pousser). Il s'agit d'un problème PSPACE-complet : <http://www.pimpernel.com/sokoban/>.

savoir si, partant d'une configuration donnée, on peut arriver à une autre configuration fixée comme but, est un problème facile. On peut le résoudre en temps polynomial, c'est un problème de la classe P : il suffit de calculer la parité des configurations initiale et finale (voir l'encadré de la page 84).

Cependant, trouver la meilleure solution est bien plus difficile. En effet, en 1990, D. Ratner et M. Warmuth ont démontré que trouver le plus court chemin entre deux configurations du *Taquin* est NP-complet. De même qu'en arithmétique savoir qu'un nombre est composé est un problème plus facile que savoir le décomposer en produit de facteurs premiers, dans le domaine du *Taquin*, savoir si l'on peut joindre deux positions est facile, alors que les joindre de manière optimale ne l'est pas du tout.

Le récent résultat de R. Hearn et E. Demaine montre que si l'on accepte que les formes des pièces soient plus variées (ne soient pas simplement des carrés), on accroît considérablement la difficulté du *Taquin*. Le problème de savoir si l'on peut passer d'une configuration donnée à une autre avec les casse-tête à pièces coulissantes est PSPACE-complet, de même d'ailleurs que le problème du plus court chemin, dès que les pièces sont des dominos 1×2 . Le passage des pièces carrées aux pièces 1×2 fait basculer de P à PSPACE-complet !

Des puzzles ordinateurs

La méthode utilisée par R. Hearn et E. Demaine pour établir le résultat que résoudre les casse-tête à pièces coulissantes est PSPACE-complet a consisté à montrer qu'avec des casse-tête à pièces coulissantes on pouvait simuler un algorithme de résolution de formules booléennes quantifiées.

L'encadré 2 représente des portes logiques en forme de casse-tête. Ces portes combinées en grand nombre créent des casse-tête à pièces coulissantes assimilables à des ordinateurs qui, si on les programme bien, traitent des formules booléennes quantifiées. Plus précisément : une formule booléenne quantifiée étant donnée, on déduit de sa forme un casse-tête à pièces coulissantes qui a la propriété qu'une pièce particulière, par exemple colorée en rouge, peut être déplacée si et seulement si la formule initiale est vraie.

Le principe général du raisonnement est alors simple : si l'on disposait d'une méthode efficace pour résoudre les casse-tête à pièces coulissantes, on associerait un casse-tête particulier à chaque formule booléenne quantifiée et on saurait si elle est vraie ou fautive de manière efficace. Par cette méthode, toutes les équations booléennes quantifiées seraient résolues rapidement et donc (puisque tout problème PSPACE peut se ramener à un problème de formules booléennes quantifiées) tous les problèmes PSPACE. Le problème des casse-tête à pièces coulissantes est donc PSPACE-complet.

Et les autres jeux ?

Ces trois dernières décennies, une multitude de jeux ont été étudiés avec l'œil de la complexité et, dans de nombreux cas, on a réussi à indiquer avec précision leur degré de difficulté sur l'échelle des classes de complexité. Parmi les jeux élucidés, citons les énigmes arithmétiques appelées cryptarithmes, le fameux Sudoku, le jeu des petits carreaux le

Master-Mind et le Sokoban (<http://www.pimpernel.com/sokoban/sokoban.html>). L'encadré 3 donne des précisions.

Pour le mathématicien David Eppstein, expert en problèmes de théorie des jeux et de complexité, les jeux les plus amusants ne sont pas les plus difficiles. Il distingue deux cas : les casse-tête (on y joue seul) et les jeux à deux joueurs (<http://www.ics.uci.edu/~eppstein/cgt/hard.html>) : « Il y a une relation curieuse entre la difficulté computationnelle et la qualité d'un casse-tête. Pour moi, les meilleurs casse-tête sont NP-complets, à l'exception de quelques bons casse-tête qui appartiennent à P, mais qui exploitent les faiblesses de l'intuition humaine plutôt que la difficulté calculatoire. Certaines classes de casse-tête sont parfois plus difficiles que NP (par exemple les casse-tête à pièces coulissantes et le Sokoban, qui sont PSPACE-complets), mais, pour moi, cela signifie seulement que leur résolution oblige à des longues suites ennuyeuses de mouvements.

Dans le cas des jeux à deux joueurs, la situation est analogue, mais avec un décalage des niveaux de complexité. L'arbre des interactions potentielles dans ces jeux donne lieu en général à des résultats du genre PSPACE-complet. Cependant, ici, cela correspond à des situations bien plus intéressantes que celles rencontrées avec les casse-tête PSPACE-complets. Certains jeux à deux joueurs sont plus difficiles encore – par exemple EXPTIME-complet (un niveau de complexité au-dessus du niveau PSPACE-complet) –, mais cela signifie pour moi qu'il est alors inévitable pour bien jouer de parcourir de longues et ennuyeuses séries de coups. »

Ainsi, les passionnés de jeux et de casse-tête ne s'occupent pas seulement à résoudre des problèmes plus ou moins classiques. Ils ne se contentent pas non plus d'en inventer de nouveaux en tentant de les rendre intéressants et difficiles, mais ils s'adonnent aussi aux joies de la théorie qui leur permet de classer les jeux et casse-tête en catégories dont le niveau est identifié avec précision et ramené à des énigmes mathématiques servant d'étalon, comme le mètre en platine iridié du Pavillon de Breteuil. Entre le jeu et les mathématiques, nulle frontière ne peut être tracée.

Jean-Paul DELAHAYE est professeur d'informatique à l'Université de Lille.

Gérard VILLEMEN : *Le jeu de Taquin* :

<http://villemien.gerard.free.fr/Puzzle/Taquin.htm>

The sliding block puzzle pages (pour jouer aux casse-tête à pièces coulissantes) : <http://www.puzzleworld.org/SlidingBlockPuzzles/default.htm>

The Mathematics Association of America : Math Games : Sliding Block Puzzles : http://www.maa.org/editorial/mathgames/mathgames_12_13_04.html

David EPPSTEIN, *Computational Complexity of Games and Puzzles* : <http://www.ics.uci.edu/~eppstein/cgt/hard.html>

Robert HEARN et Erik DEMAIN, *PSPACE-completeness of sliding-block puzzles and other problems through the nondeterministic constraint logic model of computation*, 2005 : <http://arxiv.org/abs/cs.CC/0205005>

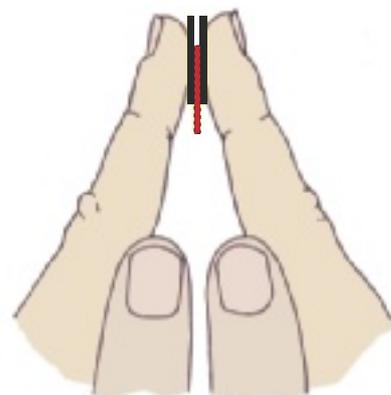
Robert A. HEARN et Erik D. DEMAIN, *The nondeterministic constraint logic model of computation : Reductions and applications*, in *Proceedings of the 29th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming*, volume 2380 of Lecture Notes, in *Computer Science*, pp. 401-413, 2002 : www.swiss.ai.mit.edu/~bob/ncl.pdf

Martin GARDNER, *The Hypnotic Fascination of Sliding-block Puzzles*, in *Scientific American*, 210, pp. 122-130, 1964.

Gadgets publicitaires

D'après Martin GARDNER

Sam Loyd (1841-1911) était un professionnel des *teasers*, ces gadgets que l'on distribuait afin d'attirer la clientèle.



C'était en Amérique, au temps de la Guerre de Sécession, de la construction des Chemins de fer, des pionniers de la mécanique américains et des rares distractions ambulantes, notamment les cirques, celui du grand Phineas Taylor Barnum en tête.

Il fallait attirer la clientèle et Barnum utilisait les services d'un jeune journaliste indépendant, Sam Loyd, qui, à 17 ans, inventa le puzzle de l'âne et du cheval. Selon Loyd, il vendit plus de un milliard de copies de ce puzzle qu'il imprimait et distribuait lui-même à ses débuts ; par la suite, il accorda des licences de ses nombreuses trouvailles. Le puzzle de l'âne et sa solution sont indiqués figure 1.

Sam Loyd, aimait les histoires qui le mettaient en valeur. Il racontait que Barnum lui rendait périodiquement visite en lui demandant : « Réexpliquez-moi comment faire ce puzzle, Sam, j'ai encore oublié. » Le puzzle le plus extraor-

dinaire de Loyd est sans conteste celui des 12 chinois qui deviennent 13 quand on tourne le disque intérieur. Notez la natte que portaient les Chinois à l'époque : en 1896, les Américains étaient effrayés par « Le péril jaune », ce qui explique la connotation raciste du dessin. Sam Loyd n'avait pas inventé ce type de puzzle, mais l'avait tiré de puzzles plus anciens de forme linéaire, comme celui des nains (*voir la figure 2*).

Quand vous montrerez ce paradoxe à un ami, demandez-lui quel nain a disparu. Disposez alors une pièce sur la moitié du haut et une autre sur la moitié du bas et vous vérifierez qu'après interversion des rectangles supérieurs, les deux moitiés sont toujours là.

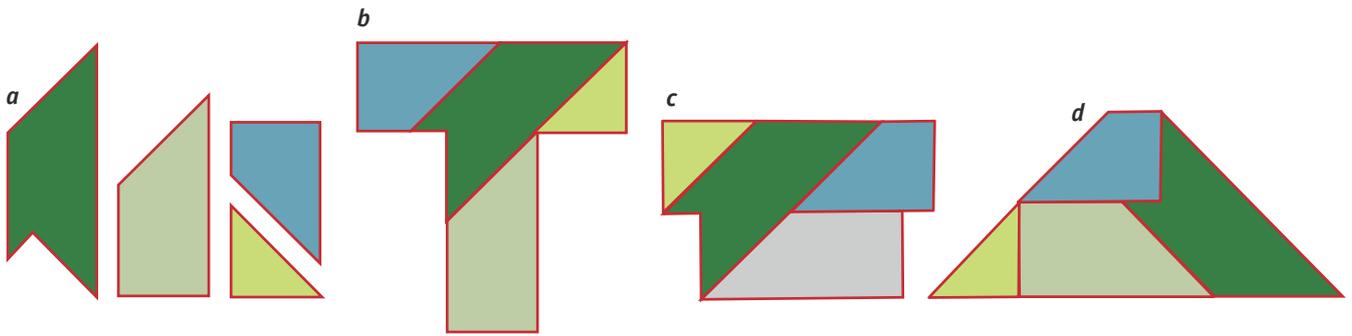
Une autre coupe sur le rectangle inférieur, entre le neuvième et le dixième nain, permet d'obtenir un treizième nain et d'autres coupes encore davantage, bien que les figures deviennent de plus en plus déformées.



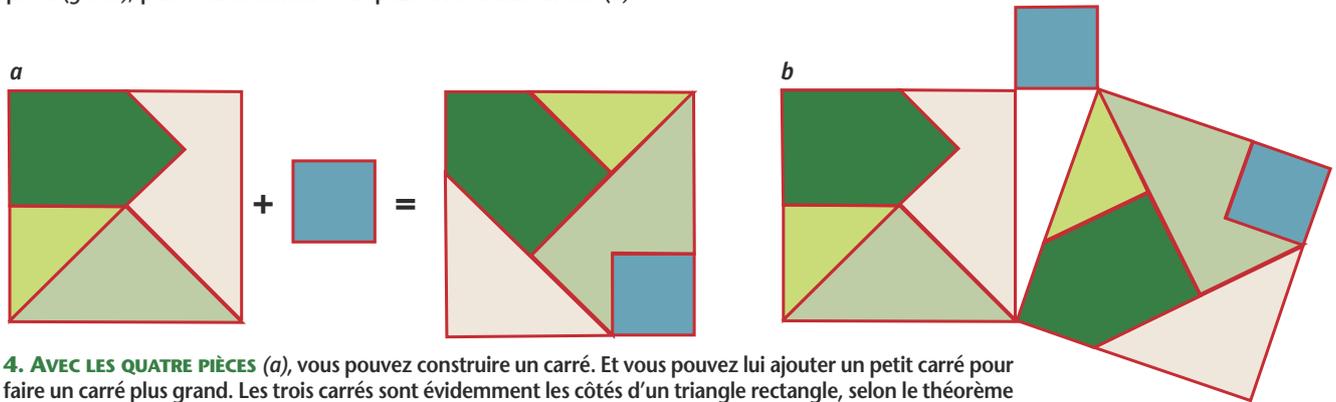
1. LE CHEVAL apparaît en blanc dans le premier puzzle de Sam Loyd.



2. DISPARITION D'UN CHINOIS par rotation du disque intérieur dans



3. AVEC LES QUATRE PIÈCES DE GAUCHE (a), vous pouvez réaliser le premier T (b), puis le second (c) en prenant le symétrique d'une pièce (grisée), puis confectionner le trapèze à l'extrême droite (d).



4. AVEC LES QUATRE PIÈCES (a), vous pouvez construire un carré. Et vous pouvez lui ajouter un petit carré pour faire un carré plus grand. Les trois carrés sont évidemment les côtés d'un triangle rectangle, selon le théorème de Pythagore dont il constitue une belle illustration.

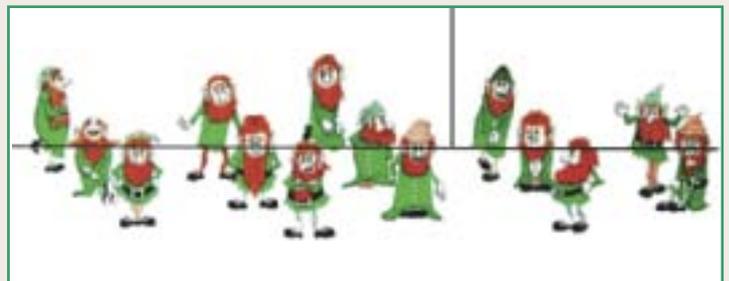
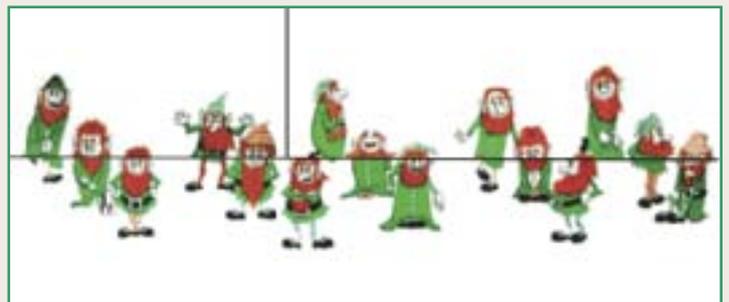
Quittons un instant Sam Loyd pour un des plus anciens puzzles publicitaires que nous vous adjurons de confectionner pour en apprécier toute la saveur : comment regrouper les quatre pièces de la figure 3 pour en faire un T ? Il existe peu de puzzles aussi simples qui soient aussi difficiles à résoudre...

Le puzzle de la figure 4 est pythagoricien, comme indiqué sur la figure b. Pour rendre le problème à rebondissement, vous pouvez donner les quatre pièces de la figure a dans le

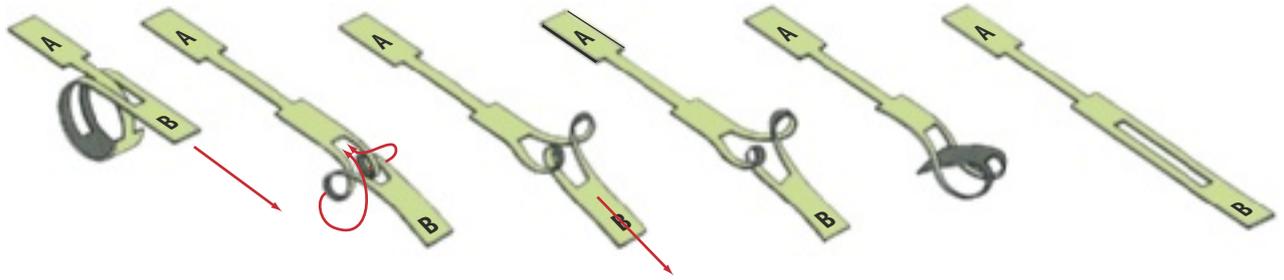
désordre pour demander d'en faire un carré, puis ajouter le second petit carré en demandant de reconstruire un carré plus grand avec les cinq pièces.

Dispositifs pour Houdini

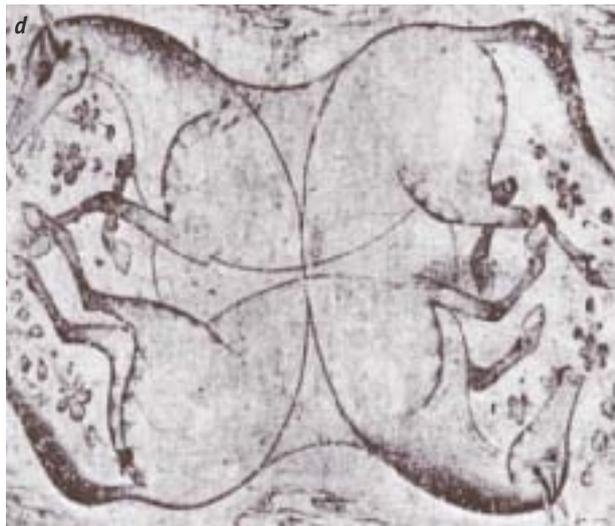
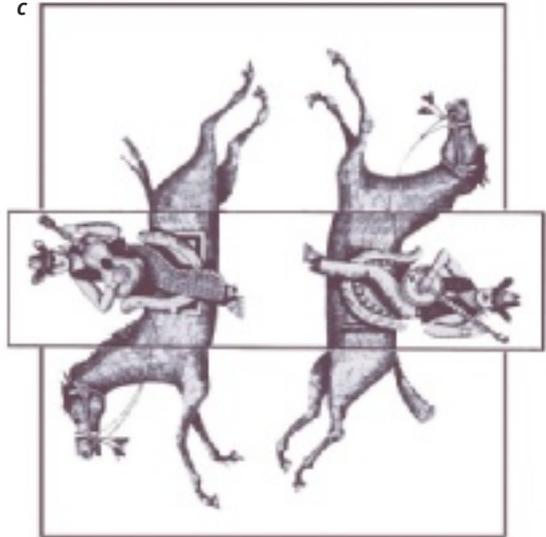
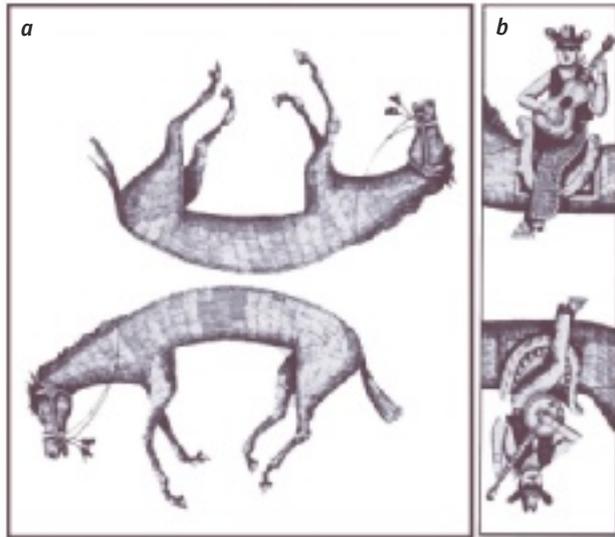
La figure à côté du titre est une illusion visuelle utilisée par les vendeurs pour attirer l'attention. Si vous frottez les pièces à la hauteur des yeux, comme indiqué sur la figure, vous et



le puzzle de Sam Loyd et interversion des bandes supérieures pour les nains, à droite.



5. LE PUZZLE DE ROLAMITE EXPLIQUÉ : il est possible de dénouer la bande même si l'extrémité A est fixée.



6. LE PONY PUZZLE : comment disposer la bande *b* pour que les cavaliers soient bien placés.

vous interlocuteur verrez, apparaît une pièce fantôme. Pourquoi apparaît-elle en bas et pas en haut est un mystère.

Sam Loyd savait combien il est difficile de conclure une vente, et son premier gadget vendu à une assurance consistait en un crayon avec, à son extrémité opposée à la pointe d'écriture, une boucle de ficelle. Les agents d'assurance se débrouillaient pour attacher le crayon à une boutonnière de veste d'un client et promettaient de le défaire si la vente était conclue.

Pour l'enfiler, la boucle était placée sur la boutonnière, puis la veste était tirée à travers la boucle d'un peu plus

que la longueur du crayon, jusqu'à ce que l'on puisse enfiler le crayon dans la boutonnière. Pour enlever le crayon, il faut tirer à nouveau la veste à travers la boucle.

Les chercheurs de la Société *Rolamite*, qui fabriquaient un dispositif sans friction pour les industries mécaniques, avaient mis au point une bande en plastique, représentée sur la figure 5, qu'il s'agissait de dénouer. La partie A était fixée à un objet trop grand pour passer dans la fente. Il s'agissait de dénouer la partie B sans détacher la partie A. Cela semble impossible alors que c'est tout à fait réalisable. Les lecteurs pourront découper un objet de ce type pour effectuer le tour.

À cheval

Mais nous avons peut-être gardé le meilleur pour la fin. Le second gadget que Sam Loyd vendit à Barnum est le placement des chevaux, le Pony puzzle (voir la figure 6). On donnait aux futurs spectateurs la carte *a* et ils devaient placer la bande *b* à droite pour que les cavaliers chevauchent les chevaux. Peu de gens pensent à tourner la bande pour placer les chevaux comme indiqué sur la figure *c*, en dessous.

Il se pourrait que Loyd ait été inspiré par une tapisserie persane du XVI^e siècle (*d*), où l'on voit les deux dispositions horizontales et verticales des chevaux.

Martin GARDNER a fait ses études à l'université de Chicago et a tenu la rubrique « Mathematical Games » de *Scientific American* de 1956 à 1981.

Martin GARDNER, *Mathematics, Magic and Mystery*, Dover 1956.

La tour de Hanoï

Jean LEFORT

Une plaisanterie de potache d'Édouard Lucas a été perfectionnée par l'utilisation conjuguée d'un système ternaire, des codes de Gray et des diagrammes de proximité.



Le professeur N. Claus (de Siam), mandarin du collège Li-Sou-Stian, nous raconte qu'il a vu, dans le grand temple de Bénarès, au-dessous du dôme qui marque le centre du monde, trois aiguilles de diamant, plantées dans une dalle d'airain, hautes d'une coudée et grosses comme le corps d'une abeille. Sur une de ces aiguilles Dieu enfila, au commencement des siècles, soixante-quatre disques d'or pur, le plus large reposant sur l'airain, et les autres de plus en plus étroits, superposés jusqu'au sommet ; c'est la tour sacrée de Brahma. Nuit et jour, les prêtres se succèdent sur les marches de l'autel, occupés à transporter la tour de la première aiguille de diamant sur la troisième, en prenant garde de ne déplacer qu'un seul disque à la fois et avec défense expresse de le poser sur un autre plus petit, règles qui ont été posées par Brahma. Quand tout sera fini, la tour et les brahmes tomberont, et ce sera la fin des mondes !

Édouard Lucas présente en 1884 ce jeu de la tour de Hanoï. On note que « Claus » est l'anagramme de Lucas et « Li-Sou-Stian » celui de Saint-Louis, collège où il enseignait. Sans compter que, dans la dernière phrase, les brahmes tomberont peut se lire « les bras me tomberont ! ».

Devenu classique, le jeu se trouve dans le commerce avec 8 disques, et le temps passé à résoudre le casse-tête double environ à chaque ajout d'un disque. En effet, pour le résoudre avec 9 disques, on déplace les 8 disques sur une des aiguilles

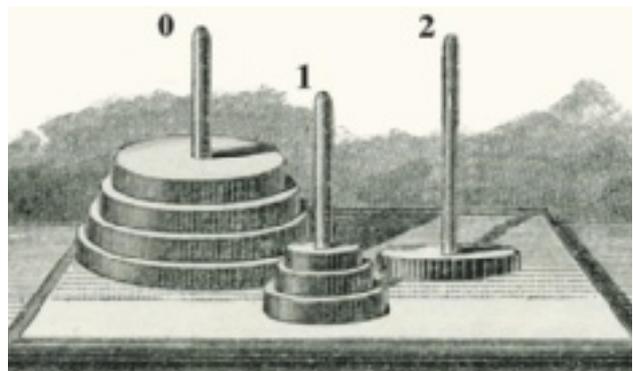
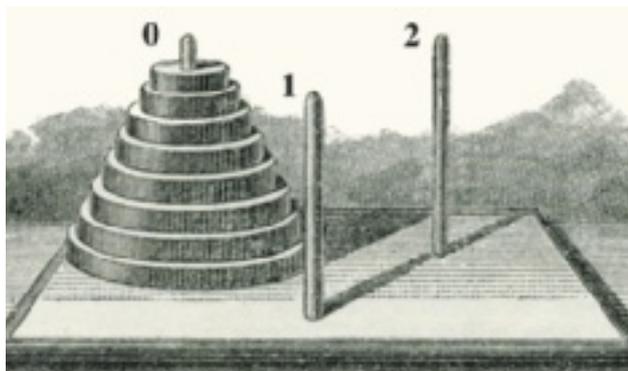
libres, on place le neuvième disque sur l'autre aiguille et, enfin, on replace les 8 disques sur le neuvième. Ainsi le nombre de coups a doublé et augmenté d'une unité. Pour un disque, il faut un coup, il en faudra 3 pour 2 disques, 7 pour 3 disques, 15 pour 4 disques... et $2^n - 1$ pour n disques. À raison d'une seconde par déplacement, une tour de Hanoï de 8 disques demande 4 minutes 15 secondes, et Lucas, avec une tour de 64 disques, place la fin du monde à plus de cinq milliards de siècles !

Codes de Gros-Gray

Le raisonnement précédent montre que le problème, tel qu'il est posé, est toujours possible. On peut se demander si, deux positions licites étant données (c'est-à-dire où aucun disque ne repose sur un disque plus petit), il est possible de passer de l'une à l'autre par des coups autorisés ? La réponse est oui, et pour le montrer, nous allons coder les positions selon les codes inventés par Louis Gros et Frank Gray.

Louis Gros était clerc de notaire à Lyon. Il publia en 1872 un document donnant la solution d'un casse-tête et ce code y était mentionné. Frank Gray travaillait aux Laboratoires Bell. Il réinventa le code et publia son étude en 1930.

Numérotions arbitrairement les trois aiguilles 0, 1 et 2 (voir la figure 1). Énonçons alors la position des disques en partant du plus grand jusqu'au plus petit. Ainsi pour 4 disques



1. ON PEUT TOUJOURS PASSER D'UNE CONFIGURATION À UNE AUTRE en suivant les règles associées au jeu de la tour de Hanoï.

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	
CODE BINAIRE	GROS-GRAY BINAIRE	CODE TERNAIRE	GROS-GRAY TERNAIRE	
00000	00000	00000	00000	<p>Dans la numération binaire (a), on considère un compteur dont les roues n'affichent que deux chiffres : 0 et 1. Les roues tournent toujours dans le même sens, avançant d'un demi-tour à chaque étape. Quand une roue passe de 1 à 0, la roue immédiatement à gauche avance d'une unité (c'est-à-dire tourne d'un demi-tour).</p> <p>Dans le code de Gros-Gray binaire (b), les roues de ce même compteur ont un mouvement alternatif, selon l'ordre 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0... Une roue ne se déplace et un chiffre change, que si, à sa droite, il y a la succession 100...0. Dans ce codage un seul chiffre change quand on passe au nombre suivant. Il s'agit d'éviter le passage en bloc de 999 à 1000, par exemple, ou de 111 à 1000 en binaire. En code Gros-Gray, après 111, on trouve 101: seul le bit central a changé.</p> <p>Dans la numération ternaire (c), les compteurs n'affichent que les chiffres 0, 1, 2.</p> <p>Dans le code de Gros-Gray ternaire (d), on passe d'un terme au suivant en prenant le nombre le plus proche qui n'a pas déjà été écrit et qui ne diffère que d'un chiffre. Ainsi après 2 c'est 12, puis 11, etc. Et nous voyons qu'un chiffre ne peut changer que si tous les chiffres à sa droite ne sont que des 0 ou que des 2. Là encore un seul «digit» (chiffre) change d'un nombre à l'autre.</p>
00001	00001	00001	00001	
00010	00011	00002	00002	
00011	00010	00010	00012	
00100	00110	00011	00011	
00101	00111	00012	00010	
00110	00101	00020	00020	
00111	00100	00021	00021	
01000	01100	00022	00022	
01001	01101	00100	00122	
01010	01111	00101	00121	
01011	01110	00102	00120	
01100	01010	00110	00110	
01101	01011	00111	00111	
01110	01001	00112	00112	
01111	01000	00120	00102	
10000	11000	00121	00202	
10001	11001	00122	00201	
10010	11011	00200	00200	
10011	11010	00201	00210	

2. RÈGLES DES CODES DE GROS-GRAY. Le code de Gros-Gray est adapté à la résolution des tours de Hanoi, car tout comme on ne change qu'un disque à la fois, un seul chiffre est changé d'un nombre à l'autre du code.

la position 1202 signifie que le plus grand disque est sur l'aiguille 1, le disque un peu plus petit sur l'aiguille 2, le troisième disque sur l'aiguille 0 et enfin le plus petit sur l'aiguille 2. Il n'y a pas d'ambiguïté sur cette notation puisque les disques s'empilent par taille décroissante. Ce codage assigne à toute position un nombre en base trois (voir la figure 2a).

Dans la numération habituelle en base trois, on compte dans l'ordre: 0,1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100, 101, 102, 110, 111, 112, 120..., mais en passant d'un nombre à l'autre il faut parfois changer plusieurs chiffres. Or dans le casse-tête de la tour de Hanoi, on ne peut déplacer qu'un disque à la fois, donc ne modifier qu'un chiffre. En nous inspirant du code de Gray, nous allons considérer l'ordre: 0, 1, 2, 12, 11, 10, 20, 21, 22, 122, 121, 120, 110, 111, 112, 102..., où l'on ne modifie qu'un chiffre en passant d'un nombre au suivant.

Revenons à notre casse-tête. Nous pouvons toujours déplacer le plus petit des disques (donc modifier le dernier chiffre du code). Tout autre disque ne peut être déplacé que si tous les disques qui lui sont plus petits sont sur une même aiguille (sinon les deux autres aiguilles sont occupées par des disques plus petits sur lesquels ne peut venir le disque choisi), donc si la position est codée par un nombre se terminant par une série de chiffres identiques (0, 1 ou 2). Or l'examen de la suite de Gray en base trois (voir la figure 2d) montre que le passage d'un nombre au suivant s'obtient soit en modifiant le dernier chiffre, soit en modifiant un chiffre si à sa droite il n'y a que des 0 ou que des 2.

Ceci prouve que la suite de Gray est plus restrictive (on ne peut pas modifier un chiffre si

tous les suivants sont des 1), et comme tous les nombres sont atteints dans cette suite, il en sera de même de toutes les positions licites de la tour de Hanoi. Nous venons ainsi de démontrer la faisabilité du casse-tête, mais nous n'avons certainement pas trouvé la méthode la plus rapide. Pour cela, il faut extraire de la suite de Gray la suite des positions utiles.

Nous profitons du fait que de chaque position (sauf si tous les disques sont sur la même aiguille), on peut proposer trois mouvements: soit déplacer le plus petit disque sur l'une des deux autres aiguilles (ce qui revient à modifier le dernier chiffre du code), soit déplacer le plus petit des disques enfilés sur les deux autres aiguilles (ce qui revient à modifier le chiffre le plus à droite différent du chiffre des unités sans le rendre égal à ce chiffre). Ainsi la position 1202 est voisine de 1201, 1200 et 1212. De même, la position 1211 est voisine de 1210, 1212 et 1011. En utilisant cette règle, on cherche la position voisine qui se trouve le plus loin dans la suite de Gray en base trois.

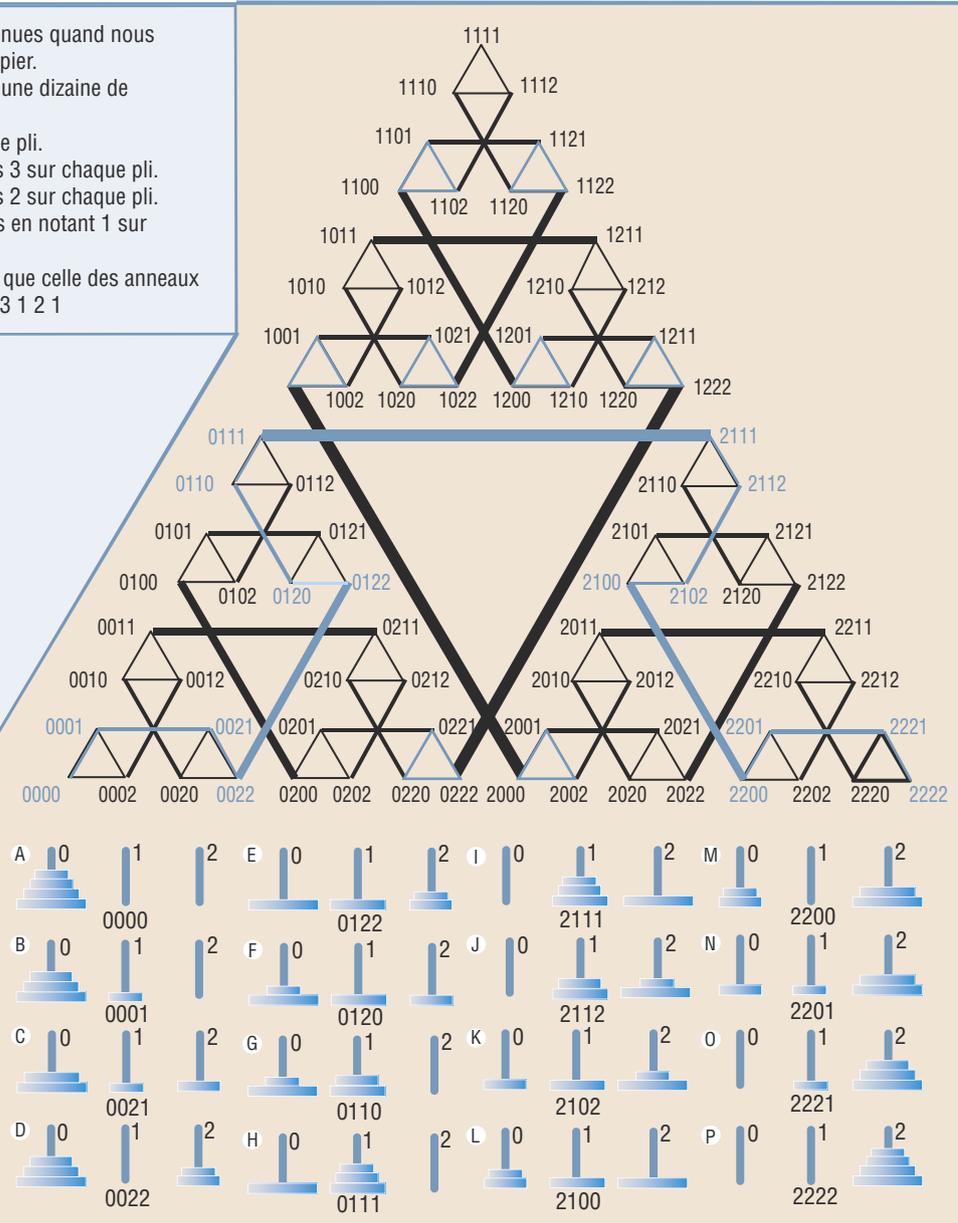
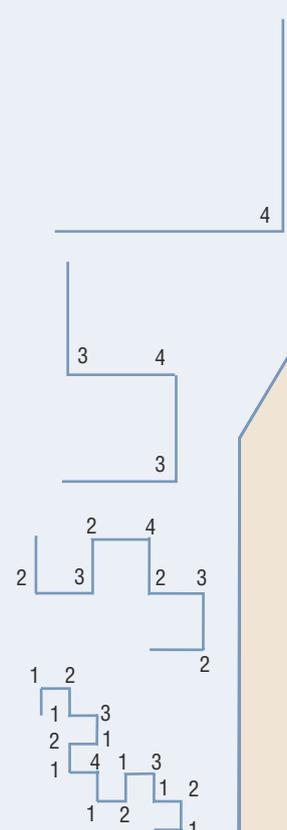
Au départ, la position est codée par des 0 et la position suivante est soit 0...01, soit 0...02. Ces deux positions ne diffèrent que par la numérotation des aiguilles et conduiront à un résultat final sur l'une ou l'autre des aiguilles 1 et 2.

Cela dépend de la parité du nombre de disques: si le nombre est impair, le démarrage sur une aiguille (1 ou 2) conduit à un empilement final sur la même aiguille, et si le nombre est impair, l'empilement final se fait sur l'autre aiguille. Les positions successives pour 4 disques sont 0000, 0001, 0021, 0022, 0122,

DEUX PETITS PROBLÈMES

Les anneaux sont numérotés à partir du plus petit.
 Question 1) Sachant que l'anneau 10 d'une tour a été déplacé une seule fois, combien d'anneaux comporte la tour de départ?
 Question 2) Sachant que l'anneau numéro 3 a été déplacé 32 fois, peut-on préciser le nombre total d'anneaux?
 Réponse 1) dix anneaux.
 Réponse 2) L'anneau numéro 2 a donc été déplacé 64 fois et le numéro 1, 128 fois. C'est 2⁸-1: il y avait huit anneaux.
 Voir: http://perso.orange.fr/therese.eveilleau/pages/jeux_mat/textes/tour_hanoi.htm

Nous retrouvons les suites obtenues quand nous plions en deux une bande de papier.
 Prenons une bande de papier d'une dizaine de centimètres de longueur.
 Plions en deux et notons 4 sur le pli.
 Plions encore en deux et notons 3 sur chaque pli.
 Plions encore en deux et notons 2 sur chaque pli.
 Recommençons encore une fois en notant 1 sur chaque pli.
 Nous retrouvons la même suite que celle des anneaux déplacés : 1 2 1 3 1 2 1 4 1 2 1 3 1 2 1

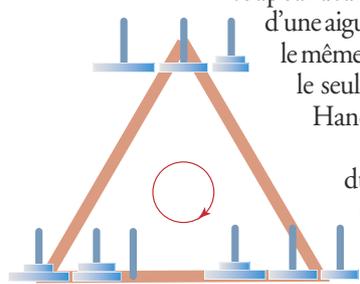


3. TOUR DE HANOÏ À QUATRE DISQUES : étapes de pliage équivalentes aux différentes étapes du chemin le plus court sur le triangle fractal.

0120, 0110, 0111, 2111, 2112, 2102, 2100, 2200, 2201, 2221, 2222 (voir la figure 3).

Si le premier pas conduit à 0002, on trouvera les positions successives en échangeant les 1 et les 2.

Il y a une façon simple d'apprendre la succession de ces positions. Si nous considérons le casse-tête formé de trois aiguilles disposées aux sommets d'un triangle équilatéral, un coup sur deux consiste à déplacer le plus petit disque d'une aiguille à l'autre en tournant toujours dans le même sens, l'autre coup consistant à déplacer le seul autre disque disponible. La tour de Hanoï est riche en rebondissements.



Examinons le graphe de proximité du casse-tête des tours de Hanoï pour 4 disques. On voit apparaître le début d'une structure fractale. Un tiers de la figure correspondrait au

graphe de proximité pour 3 disques ; il faut alors supprimer le premier chiffre. Un neuvième de la figure correspondrait au graphe de proximité pour 2 disques ; il faudrait alors supprimer les deux premiers chiffres. Pour avoir le graphe correspondant à 5 disques, on répète 3 fois ce graphe, etc.

L'épaisseur de chaque ligne est proportionnelle au numéro du disque qu'il faut déplacer, le disque le plus petit étant noté 1, le plus grand 4. On a tracé en bleu un des chemins le plus court possible pour résoudre le casse-tête. Si on suivait l'ordre du code de Gray, on parcourrait d'abord le premier triangle en bas à gauche, puis le triangle de triangle et ainsi de suite en passant par toutes les positions dans l'ordre, pour chaque triangle : bas, haut, bas.

Jean LEFORT, ancien professeur de mathématiques en classe préparatoire et ancien animateur de l'IREM de Strasbourg.

Le baguenaudier

et ses variantes

Jean LEFORT

Le jeu très ancien du baguenaudier est renouvelé par le code de Gray, périodiquement redécouvert, et qui, outre les variantes du jeu, s'applique à de nombreuses autres situations.



Le baguenaudier est formé d'un socle duquel sortent sept tiges métalliques, mobiles verticalement mais ne pouvant s'extraire du socle. Ces tiges retiennent dans leur partie supérieure un anneau qui entoure la tige précédente, sauf pour le premier qui est libre. Le but du casse-tête est de faire passer à travers tous les anneaux une navette métallique ou, au contraire, d'ôter la navette quand on part de la position où celle-ci traverse tous les anneaux.

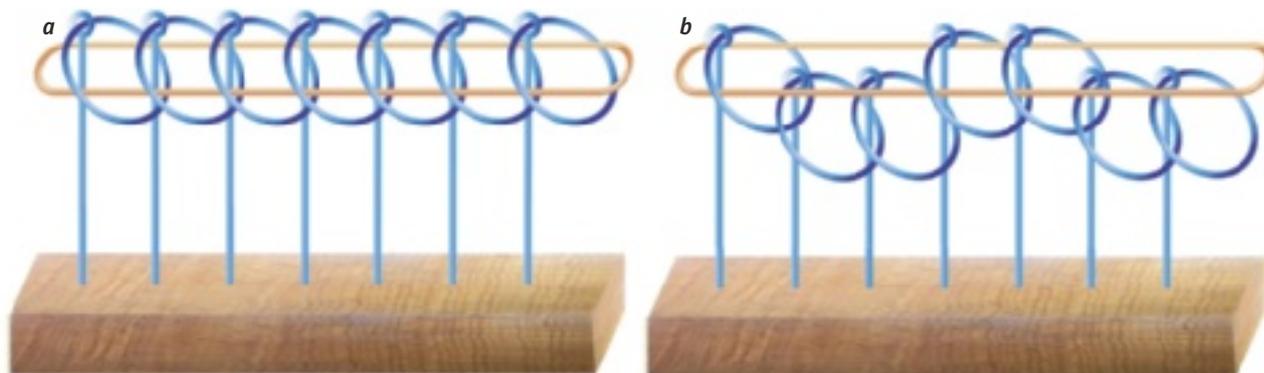
Ce jeu est très ancien puisqu'on raconte que, vers l'an 200 de notre ère, le soldat chinois Hung Ming (181-234) dut partir à la guerre servir son empereur. Laissant une épouse attristée, il lui fit cadeau d'un jeu formé de plusieurs anneaux enlacés. Intriguée par ce casse-tête qu'elle désira résoudre, elle ne vit pas le temps passer et supporta ainsi l'absence de son mari.

Si ceci n'est sans doute qu'une légende, elle témoigne de l'ancienneté du baguenaudier, que les Chinois nomment *ryou-kait-tiyo*, ce qui signifie *instrument à retarder l'hôte*. La toute première mention historique connue apparaît en Chine sous la dynastie des Sung (960-1279). Peut-être fut-il apporté en Europe par des voyageurs qui, tel Marco Polo, suivaient la route de la soie, mais ce n'est que vers 1500 qu'on en trouve

la description et le fonctionnement dans un manuscrit du mathématicien italien Luca Pacioli, le fameux auteur de *La Divine proportion*, ouvrage illustré par Léonard de Vinci et concernant le nombre d'or. Ce manuscrit, que l'auteur intitule *De viribus quantitatis*, se divise en trois parties, la première comportant une liste de problèmes amusants et de divertissements mathématiques, la seconde partie est une succession de jeux que l'on qualifie aujourd'hui de topologiques, le problème 107 se rapportant au baguenaudier, et, enfin, la troisième partie est d'inspiration plus générale. Malheureusement, d'une part le manuscrit est en italien et, d'autre part, il ne fut pas publié, ce qui fait qu'il ne fut pas connu avant d'être redécouvert au XIX^e siècle. Sans doute l'auteur avait-il en tête un ouvrage plus conséquent qui aurait été écrit en latin, la langue scientifique de l'époque.

L'étude de Cardan

C'est pourquoi on attribue le plus souvent à Jérôme Cardan la première description de cet instrument. On trouve en effet, dans son ouvrage *De subtilitate libri XXI*, publié en 1550, la description d'un instrument qui ne sert vraiment à rien et qui est formé de sept anneaux. Cardan montre



1. BAGUENAUDIERS ENTIÈREMENT MONTÉS (a) codé par 1111111 et en partie monté dans la position codée par 1001100 (b).

que ce peut être un jeu dont il donne la méthode de résolution à l'aide de trois règles sur lesquelles nous reviendrons. Enfin, il termine en disant que si cet objet est inutile en lui-même, il peut toutefois servir comme astucieuses serrures de coffres et il le compare au jeu d'échecs qui, bien qu'également inutile, est quand même bien plus subtil ; il en donne pour preuve qu'il a déjà écrit quatre livres sur le sujet ! Remarquons toutefois que le texte de Cardan est assez obscur et contient quelques erreurs.

On comprend alors que ce casse-tête ait reçu des noms très différents : anneaux chinois ou anneaux de Ming, bien sûr, anneaux de Cardan, bien évidemment, mais aussi Talamodspel, Meleda, la chaîne du diable, Baguenaudier ou Baguenodier. Dans les pays anglo-saxons, on trouve *Tiring irons* (Les fers lassants) ou encore *Time-waster* (gaspilleur de temps).

Au cours des siècles, de nombreux mathématiciens vont faire référence à cet objet. Il faut mentionner particulièrement John Wallis qui en fit une analyse mathématique détaillée qu'il publia en 1685 dans son *Treatise of Algebra, both historical and practical* (volume II, chapitre 111, pp 472 à 478).

À la suite de Wallis, ce casse-tête devint très populaire en Europe, et surtout en Grande-Bretagne et en Scandinavie où il servit, comme le signalait déjà Cardan, de fermeture pour les sacs et les valises. Remarquons néanmoins que, sauf à ne posséder que peu d'anneaux, une telle fermeture demande de la patience et il ne faut pas avoir besoin de chercher rapidement son mouchoir dans un sac ainsi fermé !

Louis Gros, notaire mathématicien

Le progrès décisif en la matière viendra d'un clerc de notaire lyonnais, Louis Gros, qui publie en 1872 un petit opuscule intitulé *Théorie du baguenaudier*. Cet ouvrage ne resta que peu de temps anonyme grâce à la perspicacité du mathématicien Édouard Lucas dont on connaît l'intérêt pour tous les jeux à base de réflexions mathématiques et qui traite du baguenaudier dans le premier volume de ses *Récréations mathématiques* en 1891.

Le baguenaudier comporte en général sept anneaux, chacun étant passé dans la tige qui retient le précédent (voir la figure 1). Il y a donc un anneau que ne retient aucune tige. Plaçons cet anneau à droite et numérotions les anneaux à partir de la droite, de 1 à 7 en général. Dans une position quelconque, la navette passe à l'intérieur de certains

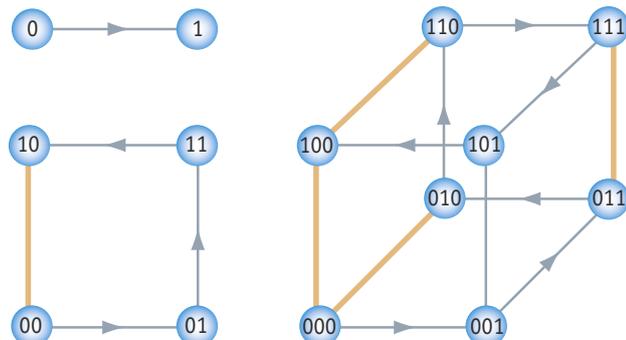
anneaux et à l'extérieur d'autres. Nous dirons qu'un anneau est monté si la navette passe en son centre, démonté dans le cas contraire. Nous supposons qu'au départ le baguenaudier est entièrement démonté.

Quelques essais montrent qu'il est toujours possible de monter ou de démonter l'anneau de droite et même, simultanément, les deux premiers anneaux de droite. En revanche, il faut plus de perspicacité pour remarquer qu'un autre anneau ne peut être manipulé que s'il se trouve à gauche d'un anneau monté et que ce dernier n'a, à sa droite, que des anneaux démontés. C'est la première règle que donne Cardan. Vérifions-la sur la figure 1b, où l'on remarque qu'en tirant la navette vers la gauche, il est possible de baisser le quatrième anneau. La deuxième règle que Cardan donne, assez obscure, semble vouloir régler l'ordre de marche des deux premiers anneaux. Enfin, la troisième explique qu'il faut faire des allers et retours continuels, ce qui résulte de la première règle. En effet, quand un anneau (autre que le premier) a été monté, c'est que le précédent était le seul monté à sa droite. Mais pour monter le suivant à gauche, il faut descendre ce précédent, c'est-à-dire monter celui d'avant, et ainsi de suite... donc reprendre toute la manipulation des premiers anneaux.

Le mérite de Louis Gros est d'avoir trouvé un codage de la position du baguenaudier qui en permet une résolution systématique. En fait, il invente, sans le savoir, ce qui deviendra le code Gray, indispensable en automatisme et en informatique, mais, comme il n'en saisit pas l'intérêt, il en donne la transcription immédiate en numération binaire.

Notons 1 un anneau monté (un anneau dans lequel passe la navette) et 0 un anneau démonté. Une position quelconque est ainsi représentée par un nombre écrit dans le système binaire, c'est-à-dire avec des 0 et des 1. Alors la suite des positions en partant du baguenaudier démonté est donnée par :

0 0 0 0 0 0	
0 0 0 0 0 1	On monte le premier anneau,
0 0 0 0 1 1	puis le deuxième.
0 0 0 0 1 0	On descend le premier anneau
	pour manipuler le troisième.
0 0 0 0 1 1 0	On monte le troisième anneau,
0 0 0 0 1 1 1	puis le premier pour
0 0 0 0 1 0 1	descendre le deuxième.
0 0 0 0 1 0 0	On descend le premier,
0 0 0 1 1 0 0	ce qui permet de monter le quatrième.
..... etc.	



2. CODES DE GRAY et parcours sur des parallélogrammes.

LE CODE DE GROS-GRAY

Le code de Gros-Gray de 0 est « 0 », ce qui, pour nous, est équivalent à « 00 », « 000 » ou « 000 », etc. D'une manière générale, nous ne tenons pas compte des « 0 » les plus à gauche du code. Outre la caractérisation exposée dans le texte, si nous connaissons le code de Gros-Gray des 2^n premiers entiers, celui des 2^n suivants est obtenu en le reprenant en ordre inverse et en le faisant précéder des codes d'un « 1 ». Ainsi, à partir des quatre premiers codes 00, 01, 11, 10, on obtient les quatre suivants en inversant l'ordre : 10, 11, 01, 00 et en ajoutant un « 1 » avant chaque code : 110, 111, 101, 100.

Il faudra ensuite chercher à descendre le troisième anneau, ce qui implique de reprendre la suite précédente à l'envers... et en arrivant à la position 0 0 0 1 0 0 0, on pourra monter le cinquième anneau, ce qui donne 0 0 1 1 0 0 0, etc.

On remarque que l'ordre de succession est celui d'un code Gray (voir *La Tour de Hanoi* par Jean Lefort, dans ce dossier). Pour connaître le rang d'un nombre écrit selon ce système, il suffit de remplacer chaque 1, en partant de la droite, par 0 s'il y a un nombre pair de 1 à sa gauche (lui compris), par 1 sinon. On obtient alors un nombre écrit en binaire ordinaire.

Il est ainsi facile de voir que le baguenaudier entièrement monté correspondant à la position 1 1 1 1 1 1 1 donne le numéro binaire 1 0 1 0 1 0 1 soit $2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^0 = 85$. Il faut donc 85 mouvements pour monter un baguenaudier de sept anneaux. Déjà Cardan avait donné ce résultat et précisé qu'il fallait 190 mouvements pour achever un cycle complet. On notera qu'avec sept chiffres binaires, on peut écrire les nombres jusqu'à 127 et que la position la plus longue à atteindre sur le baguenaudier est celle où seul le dernier anneau est monté. Cette position correspond au cas où on chercherait à manipuler un huitième anneau virtuel.

Il est facile de calculer que le montage d'un baguenaudier de n anneaux nécessite $2^{n-1} + 2^{n-3} + 2^{n-5} + \dots = \lceil 2^{n+1}/3 \rceil$ opérations, où le crochet indique que l'on prend le quotient entier de la division de 2^{n+1} par 3 (selon la parité de n la suite termine à 1 ou à 2 : il faut donc distinguer deux cas, ce qu'évite le recours à la partie entière). On voit ainsi que le nombre d'opérations double à peu près quand on ajoute un anneau.

En fait, comme l'ont noté différents auteurs, il est possible de diminuer ce nombre en manipulant, chaque fois que c'est possible, les deux premiers anneaux simultanément. C'est ce qu'on dénomme la marche accélérée. On passe directement d'une position « x 0 0 » à « x 1 1 » ou l'inverse. En raison de la symétrie du code de Gray, on voit que cela a lieu deux fois sur huit mouvements : on regroupe les deux premiers et le 6^e et 7^e mouvements. Comme le nombre de mouvements dans la marche normale, n'est pas un multiple de 8, il faut distinguer différents cas. S'il y a p mouvements selon la marche normale, il y aura P mouvements selon la marche accélérée, avec la correspondance suivante :

$$\begin{array}{ll} p = 8q + 1 \text{ ou } 2 & P = 6q + 1 \\ p = 8q + 3 \text{ ou } 4 \text{ ou } 5 & P = 6q + 2 \text{ ou } 3 \text{ ou } 4 \\ p = 8q + 6 \text{ ou } 7 & P = 6q + 5 \\ p = 8q & P = 6q \end{array}$$

On résume ces formules en prenant l'entier le plus proche de $3p/4$ arrondi supérieurement si on tombe sur un demi-entier. Dans le cas de sept anneaux, $p = 85 = 8q + 5$, donc $P = 6q + 4 = 64$.

Le baguenaudier est régulièrement réinventé sous des formes variées : en moins d'un siècle, plus de 30 variantes ont été répertoriées, essentiellement aux États-Unis. Il faut toutefois faire une mention particulière de deux jeux, le *Spin Out* et le puzzle hexadécimal, inventés tous les deux par William Keister en 1972. William Keister était un jeune collègue de Franck Gray, passionné par les jeux mathématiques, passion à laquelle il put s'adonner pleinement lorsqu'il fut à la retraite à partir de 1972.

Le code de Gray sert aussi à numéroter les diverses étapes d'un voyageur se promenant sur un parallélépipède rectangle. La figure 2 représente son parcours pour des parallélépipèdes à deux et trois dimensions, mais la numérotation reste valable pour des dimensions supérieures.

Le Spin Out et le puzzle hexadécimal

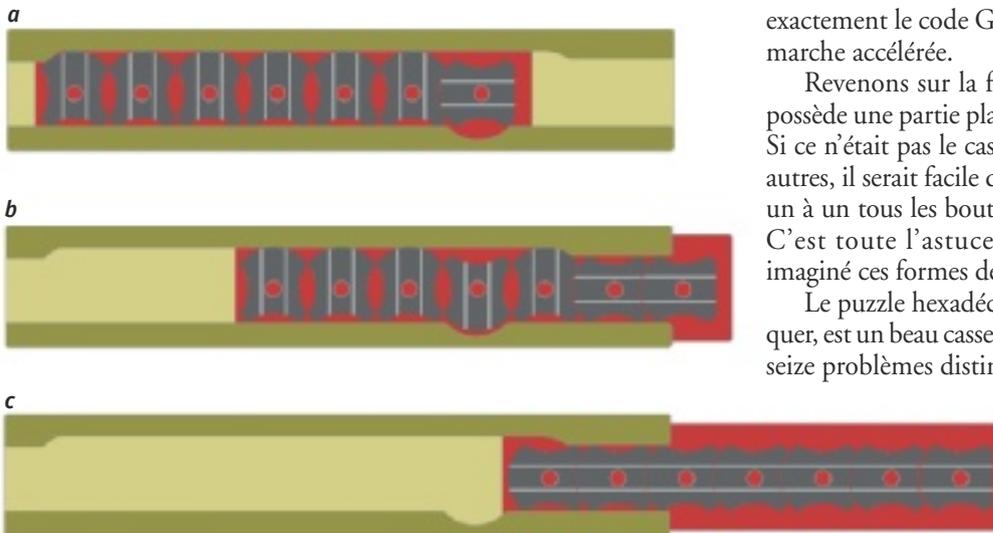
Le *Spin Out* se compose d'une réglette munie de sept boutons de forme particulière qui tournent sur un axe et peuvent ainsi s'emboîter ; le premier bouton a une forme légèrement différente pour éviter des mouvements aberrants. Cette réglette coulisse dans une règle munie d'une échancrure. C'est seulement quand il est en face de cette échancrure qu'un bouton de la réglette peut tourner. Les boutons ont deux positions essentielles. Une position dite horizontale et une position verticale (voir la figure 3a). En pratique, il existe une deuxième position verticale qui bloque tout et qui ne nous intéresse pas pour la suite du jeu (voir la figure 3b). Quand tous les boutons sont à l'horizontale (voir la figure 3c), la réglette peut se libérer de la règle, sinon elle reste coincée par le premier bouton vertical.

Le but du jeu est, partant de la position où tous les boutons sont en position verticale, de sortir la réglette en plaçant tous les boutons à l'horizontal ou le contraire. En notant 0 un bouton horizontal et 1 un bouton vertical, le *Spin Out* suit exactement le code Gray, sauf qu'il n'est pas question ici de marche accélérée.

Revenons sur la forme du premier bouton à droite. Il possède une partie plate là où les autres ont un arc de cercle. Si ce n'était pas le cas et que ce bouton était identique aux autres, il serait facile de le tourner vers la droite et de libérer un à un tous les boutons. Le casse-tête n'en serait plus un ! C'est toute l'astuce du créateur de ce jeu que d'avoir imaginé ces formes de boutons.

Le puzzle hexadécimal, comme son nom semble l'indiquer, est un beau casse-tête en bois dur qui pose au minimum seize problèmes distincts.

3. LE JEU DE SPIN OUT est constitué de sept boutons qui pivotent au sein d'une réglette lorsqu'ils se trouvent face à une échancrure (en b), le 4^e bouton a une position inintéressante).



Il se compose d'une base sur laquelle coulisse un chariot qui porte huit bascules. Ce chariot ne peut sortir vers la droite (*position de la figure 4*) mais seulement vers la gauche. Cependant, cela n'est possible, en raison de la présence d'une butée, que si les bascules sont relevées vers l'arrière, contrairement au cas de la figure 4 où elles sont baissées vers l'arrière. Pour manipuler ces bascules, il faut ouvrir la porte en la reculant, ce qui se fait en poussant sur le bloc des clés.

Ce bloc de clés porte quatre clés qui ont chacune deux positions repérées par 0 et 1. Une aiguille permet de fixer un choix de position, par exemple, comme sur la figure, 1110. On voit par là qu'il y a 16 positions des clés. On voit alors que quand on appuie sur le bloc des clés, une clé en position 0 passe sous une bascule baissée vers l'arrière et qu'une clé en position 1 passe au-dessus d'une bascule baissée vers l'avant. Dans les cas contraires, il est impossible de pousser sur le bloc et, par suite, on ne peut ouvrir la porte pour manipuler la bascule en face de la porte.

Nous avons dit qu'il y a au moins 16 jeux différents selon les 16 positions des clés. En fait, rien n'interdit de se compliquer la vie en changeant la position des clés suivant un rythme prédéterminé après chaque manipulation d'une bascule. Si on se donne un rythme de deux positions, cela correspond à 240 jeux *a priori* différents. Avec un rythme de trois, c'est 3 840 jeux.

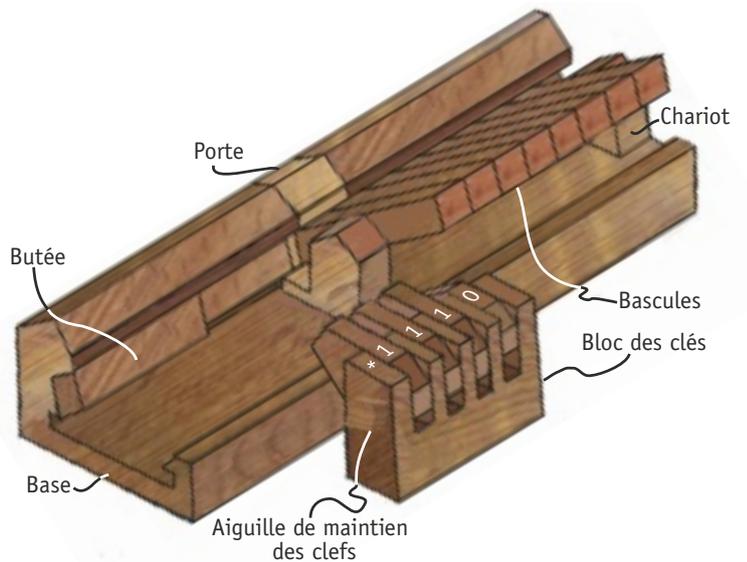
Nous nous contenterons d'étudier quelques jeux avec une position fixe des clés. On numérote les bascules, de la gauche vers la droite, de 1 à 8. Donner une solution, c'est donner la liste des bascules à manipuler. Ainsi, pour la position 0000, il faut manipuler les bascules dans l'ordre 32181232171216154321, ce qui fait 20 manœuvres. Mais il y a une autre façon de noter la position des bascules. C'est de les repérer par 1 si elles sont relevées vers l'arrière et par 0 si elles sont relevées vers l'avant. En notant leurs positions de 8 à 1, il vient :

```

0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 1 0 0 (3)
0 0 0 0 0 1 1 0 (2)
0 0 0 0 0 1 1 1 (1)
1 0 0 0 0 1 1 1 (8)
1 0 0 0 0 1 1 0 (1)
1 0 0 0 0 1 0 0 (2)
1 0 0 0 0 0 0 0 (3)
1 0 0 0 0 0 1 0 (2)
1 0 0 0 0 0 1 1 (1)
1 1 0 0 0 0 1 1 (7)
1 1 0 0 0 0 1 0 (1)
1 1 0 0 0 0 0 0 (2)
1 1 0 0 0 0 0 1 (1)
1 1 1 0 0 0 0 1 (6)
1 1 1 0 0 0 0 0 (1)
1 1 1 1 0 0 0 0 (5)
1 1 1 1 1 0 0 0 (4)
1 1 1 1 1 1 0 0 (3)
1 1 1 1 1 1 1 0 (2)
1 1 1 1 1 1 1 1 (1)

```

On voit bien que, comme dans le code de Gray, on ne change qu'un chiffre à chaque étape (puisque'on ne peut manipuler qu'une bascule à chaque coup), mais on saute



4. LE CASSE-TÊTE hexadécimal.

allègrement d'un nombre à un nombre bien plus élevé pour accélérer le jeu.

Le jeu le plus simple correspond à la position des clés notée 1111. On manipule les bascules les unes après les autres de 1 à 8 et le chariot se libère. Ce n'est pas vraiment très intéressant.

Les jeux avec position des clés imposées

Un jeu très voisin du baguenaudier ou du *Spin Out* est donné par la position 0001 des clés. Il peut sembler en effet qu'il faille suivre le code de Gray et c'est bien ce qu'il faut faire, du moins au début. Mais comme il n'y a que quatre clés, on peut éviter de revenir complètement en arrière quand il faut manipuler une bascule au-delà de la 5^e. Ainsi il est inutile de toucher à la bascule 1 quand on manipule la 6^e, puisque cette bascule n'étant pas en face d'une clé, elle ne gêne pas pour l'ouverture de la porte. De même, il est inutile de toucher aux deux premières bascules quand on manipule la 7^e et, enfin, aux trois premières quand on manipule la 8^e. Ce qui fait qu'au lieu d'avoir 170 mouvements à faire, il en suffit de 150.

En fait le code de Gray est rigoureusement suivi, mais à l'envers, pour la position 1110 des clés. Et il faut bien alors 170 manœuvres pour libérer le chariot.

Voici, du jeu le plus rapide au plus long, avec le nombre de coups à effectuer, la position des clés.

1111 (8)	0111 (16)	0000 (20)
1011 (26)	1000 (28)	0101 (36)
0100 (38)	0011 (42)	1101 (52)
1100 (54)	1010 (56)	0010 (72)
0110 (102)	1001 (118)	0001 (150)
1110 (170)		

Une recherche sur Internet, fournit facilement les solutions, mais on perd alors tout le sel du casse-tête. Merci à W. Keister d'avoir inventé un tel divertissement et surtout d'avoir pris soin d'en soigner l'esthétique.

Jean LEFORT, ancien professeur de mathématiques en classe préparatoire et ancien animateur de l'IREM de Strasbourg.



Quickies !

Michel CRITON

Les solutions des « Quickies » démontrent les inattendues possibilités de la réflexion.

L'expression *Mathematical Quickies* est due à Charles Trigg, ingénieur et mathématicien américain (1898-1989). En 1949, Trigg devient « problem editor » de la revue *Mathematics Magazine* éditée par la *Mathematical Association of America*. À partir de mars 1950, il propose une nouvelle rubrique dans la section des problèmes : les *Mathematical Quickies*. Il définit ces problèmes comme des questions relativement simples qui peuvent être résolues par des méthodes laborieuses, mais qu'on peut élucider en quelques instants avec une certaine astuce.

Charles Trigg publiera une sélection de 270 de ces problèmes dans un recueil (*Mathematical Quickies*, Éditions Dover, 1985).

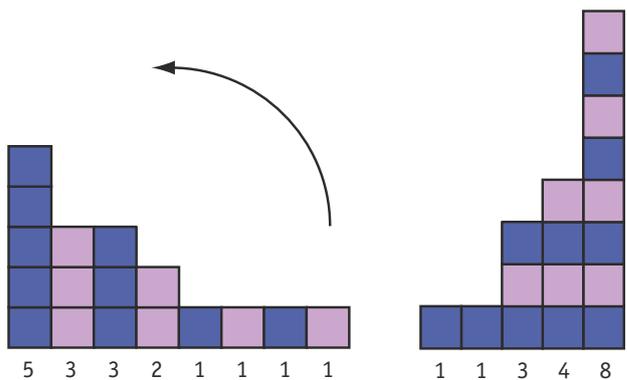
Le concept sera repris par Martin Gardner dans ses chroniques de jeux mathématiques de *Scientific American* et ensuite par différents autres auteurs. Dans un ouvrage publié en 1978 et dont l'adaptation française est *Haha ou l'éclair de la compréhension mathématique*, Martin Gardner étudie les mécanismes de l'invention mathématique et d'une telle « résolution-éclair » d'un problème. Il met en évidence l'abîme qui existe entre le travail d'un ordinateur, qui peut suivre pas à pas un programme de résolution préétabli, et celui d'un cerveau humain, capable d'intuitions fulgurantes totalement imprévisibles. Selon M. Gardner, il n'y a pas toujours de corrélation directe entre ce que l'on appelle l'intelligence (celle mesurée par le Q. I. par exemple) et cette aptitude à mettre en place les pièces d'un puzzle qui conduisent à ce fameux « haha ». Albert Einstein est un exemple d'un cerveau parfois lent (il a été un élève plutôt médiocre) capable d'intuitions fulgurantes. Voyons un premier exemple.

Les huit nombres

Montrez qu'une somme de huit nombres entiers strictement positifs dont le plus grand est cinq peut toujours s'écrire comme une somme de cinq nombres entiers strictement positifs dont le plus grand est huit (revue *Eurêka*, Ottawa, 1975). Inutile de se lancer dans une longue série d'inégalités : un simple schéma suffit pour se persuader de la vérité de cette assertion.

Toute somme de huit nombres dont le plus grand est cinq peut être représentée à l'aide d'un diagramme où les huit nombres sont rangés par ordre décroissant (voir le diagramme de gauche de la figure ci-dessous). Un tel diagramme associé à

une partition d'un nombre entier est appelé « diagramme de Ferrer ». En faisant pivoter ce diagramme d'un quart de tour comme l'indique la flèche, on obtient un nouveau diagramme représentant une somme de cinq nombres entiers dont le plus grand est huit, rangés dans l'ordre croissant.



Dans les problèmes qui suivent, les solutions ne seront données qu'en fin d'article, afin de permettre aux lecteurs de chercher. La source est indiquée après chaque titre de problème, lorsqu'elle est connue de l'auteur.

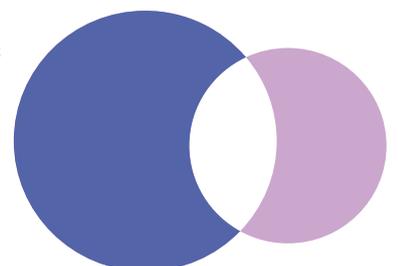
1. Les trois tirelires

On sait que trois tirelires contiennent : l'une deux billets de 10 euros, la deuxième un billet de 10 euros et un billet de 20 euros, la troisième deux billets de 20 euros. Sur chacune d'elles, une étiquette indique une somme, mais une main enfantine a mélangé les étiquettes de telle sorte qu'aucune n'indique la somme contenue dans la tirelire sur laquelle elle est fixée.

Comment, en retirant un seul billet d'une seule tirelire, peut-on connaître précisément le contenu de chacune des trois ?

2. Les deux disques

Deux disques dont les rayons respectifs sont 15 et 20 centimètres se superposent partiellement. Quelle est la différence entre l'aire coloriée en bleu et l'aire coloriée en rose ? (C. W. Trigg)



3. Les dix verres

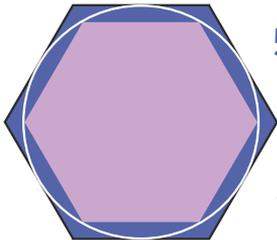
Cinq verres pleins et cinq verres vides sont disposés en alternance comme sur la figure du haut.

Comment obtenir la disposition du bas en touchant le moins de verres possibles ? (M. Gardner)



4. Quel est le plus grand ?

Quel est le triangle ayant la plus grande aire : un triangle isocèle de côtés 13 cm, 13 cm et 10 cm ou un triangle isocèle de côtés 13 cm, 13 cm et 24 cm ? (Leo Moser)



5. Deux hexagones

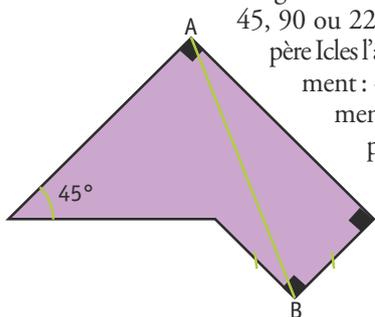
Un cercle est ensermé entre un hexagone inscrit et un hexagone circonscrit, comme représenté ci-contre. Quel est le rapport des aires des deux hexagones ?

6. La locomotive et la mouche

Une locomotive parcourt une distance de 100 kilomètres. Une mouche qui va deux fois plus vite part en même temps et du même endroit que la locomotive et fait des allers-retours incessants entre la locomotive et la destination finale. Elle s'arrête quand elle est écrasée par la locomotive qui heurte le butoir. Quelle distance a parcouru la mouche ?

7. Le terrain du père Icles

Le père Icles possède un terrain en forme de pentagone. Comme l'indique la figure, les deux plus petits côtés de ce pentagone ont la même longueur et ses angles intérieurs mesurent tous



45, 90 ou 225 degrés. Lorsqu'on demande au père Icles l'aire de son terrain, il répond simplement : « La diagonale AB mesure exactement 152 mètres. Vous en savez assez pour calculer l'aire du terrain ! »

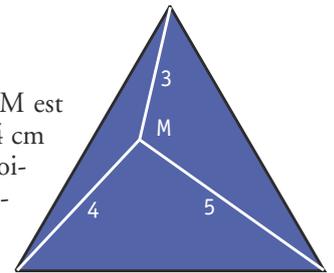
Quelle est l'aire du pré d'Icles ? (Championnat international des jeux mathématiques et logiques).

8. Égal à sa moyenne

Le nombre décimal 4,5 est égal à la moyenne des chiffres utilisés pour l'écrire. Trouvez un autre nombre décimal, dont l'écriture utilise au moins deux chiffres différents, ayant la même propriété. (L. Graham)

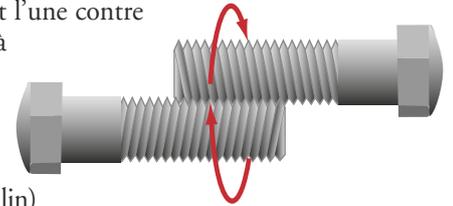
9. Équilatéral et remarquable

Dans ce triangle équilatéral, le point M est situé à 3 cm d'un premier sommet, à 4 cm d'un deuxième sommet et à 5 cm du troisième. Quelle est l'aire du triangle équilatéral ? (Revue *School Science and Mathematics*, 1933)



10. Les deux vis

Deux vis sont disposées tête-bêche. On les fait tourner simultanément en les maintenant l'une contre l'autre, dans le même sens et à la même vitesse. Les têtes des deux vis vont-elles s'éloigner, se rapprocher ou rester à distance constante ? (Martin Gardner d'après Theodor Kalin)



11. Une série répétitive

Trouvez une expression donnant le n^{e} terme u_n de la série : $-4 + 7 - 4 + 7 - 4 + 7 - 4 + 7 - \dots$ (C. W. Trigg)

12. Quatrième degré

Combien de solutions réelles négatives l'équation suivante possède-t-elle : $x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4 = 0$? (C. W. Trigg)

13. Les trois logiciens

Trois parfaits logiciens jouent au jeu suivant. Un meneur de jeu dispose de quatre timbres rouges et de quatre timbres verts. Il bande les yeux des logiciens, colle deux timbres sur le front de chaque logicien, puis cache les deux timbres restants dans un tiroir. Les trois logiciens retirent alors leurs bandeaux. Chacun d'eux voit les timbres collés sur le front de ses deux collègues, mais ne voit pas ceux collés sur son propre front.

On demande alors au premier logicien s'il connaît la couleur des timbres collés sur son front, et il répond « non ». On pose la même question au deuxième logicien qui répond aussi « non ». On pose ensuite la même question au troisième logicien qui répond encore « non ». On pose une nouvelle fois la question au premier logicien qui répond à nouveau « non ». Mais lorsqu'on pose une deuxième fois la question au deuxième logicien, celui-ci répond alors « oui » ! Comment le deuxième logicien a-t-il trouvé la couleur de ses timbres ? (Raymond Smullyan)

Voir les solutions page suivante.

Michel CRITON est président de la Fédération française des jeux mathématiques.

C. W. TRIGG, *Mathematical Quickies*, Éditions Dover, 1985.

L. GRAHAM, *Ingenious mathematical Problems and Methods*, Éditions Dover, 1959.

L. GRAHAM, *The Surprise Attack in Mathematical Problems*, Éditions Dover, 1968.

M. GARDNER, « Haha » ou l'éclair de la compréhension mathématique, in *Bibliothèque Pour la Science*, 1979.

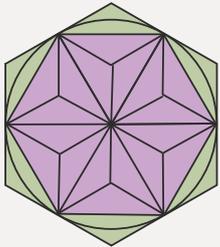
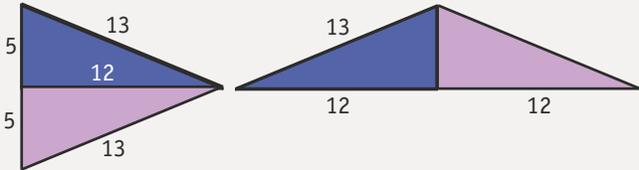
Solutions

1. On sort un billet de la tirelire sur laquelle figure l'étiquette « 30 euros ». Si le billet est un billet de 10 euros, la tirelire contient 20 euros, celle indiquant « 40 euros » en contient 20 et celle indiquant « 20 euros » en contient 30. Si le billet retiré est un billet de 20 euros, la tirelire indiquant « 30 euros » en contient 40, celle indiquant « 20 euros » en contient 30 et celle indiquant « 40 euros » en contient 20.

2. La différence est égale à la différence entre les aires des deux disques, soit $\pi (20^2 - 15^2) = 175 \pi \text{ cm}^2$.

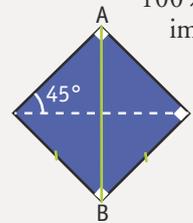
3. La plupart des gens essaient de résoudre ce problème en procédant à des échanges comme si les verres pleins et vides étaient des objets solides différents. Ils obtiennent alors la nouvelle disposition en deux échanges, ce qui leur a fait toucher quatre verres. C'est oublier que le contenu des verres pleins est liquide et qu'il est possible de transvaser ce liquide sans toucher aux verres dans lesquels on verse le liquide. Il est donc possible d'effectuer la transformation en transvasant les verres 6 et 9 dans les verres 2 et 4.

4. Les deux triangles ont la même aire. En effet, chacun d'eux se décompose en deux triangles rectangles de côtés 5, 12 et 13 centimètres.

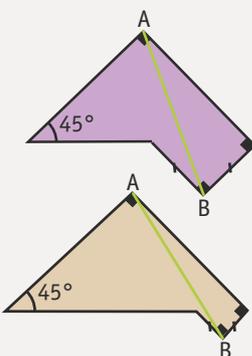


5. Le pavage ci-contre, où l'on a fait subir une rotation de 30 degrés à l'un des deux hexagones, nous donne immédiatement la réponse : il suffit de compter les triangles. Le rapport de l'aire du petit hexagone à celle du grand est égal à $3/4$.

6. On peut résoudre le problème en sommant la série géométrique des allers-retours de la mouche, $100 \times 4/3(1 + 1/3 + 1/9 + \dots) = 200$, mais il est plus immédiat de remarquer que si la mouche va deux fois plus vite que la locomotive, elle parcourra une distance double dans le même temps que la locomotive. Le mathématicien Joseph von Neuman, à qui l'on avait posé le problème, répondit instantanément « 200 kilomètres ». Son interlocuteur lui dit alors : « Vous n'avez évidemment pas sommé la série géométrique... » et von Neuman répondit : « Parce qu'il y avait un autre moyen ? »



7. Au premier abord, il semble qu'il manque une donnée dans ce problème. Il n'en est rien ! Une façon élégante de résoudre le problème est de supposer que les données sont suffisantes pour le résoudre donc que l'aire demandée ne dépend pas des tailles respectives des deux triangles rectangles isocèles accolés.

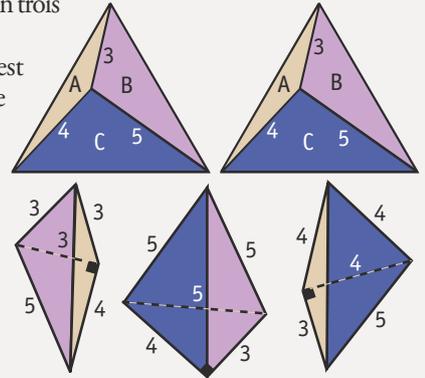


Si l'on fait varier les dimensions de ces deux triangles, la longueur AB demeurant constante, l'aire totale doit rester, elle aussi, constante. Il suffit alors de se placer dans un des deux cas extrêmes (illustrés ci-contre) où soit les deux triangles sont identiques, soit l'un des deux triangles devient de dimensions et d'aire nulles. Dans les deux cas, l'aire totale est la même : $152^2 / 2 = 11\,552 \text{ m}^2$.

8. Donnons deux exemples : 3,750 et 1,1250000.

9. À l'aide de deux exemplaires de notre triangle, réalisons le « puzzle » suivant. Découpons chaque triangle en trois morceaux selon les segments joignant le point M aux trois sommets. Nous obtenons deux fois chacun des trois morceaux A, B et C. Rassemblons ces six morceaux en trois quadrilatères.

Chacun des quadrilatères est constitué d'un triangle rectangle de côtés 3, 4 et 5 centimètres et d'un triangle équilatéral. On en déduit l'aire totale des trois quadrilatères : $18 \text{ cm}^2 + (\sqrt{3}/4)(3^2 + 4^2 + 5^2) = (18 + 12,5\sqrt{3}) \text{ cm}^2$ et l'aire d'un triangle équilatéral : $(9 + 6,25\sqrt{3}) \text{ cm}^2$.



10. Les deux têtes de vis vont rester à distance constante. Si l'on agissait sur la seule vis de gauche, celle-ci se déplacerait vers la gauche (le mouvement est un mouvement de dévissage). Si l'on agissait sur la seule vis de droite, celle-ci se déplacerait aussi vers la gauche (le mouvement est un mouvement de vissage). Les deux mouvements vont donc se compenser. Gardner compare la situation à celle d'une personne qui prend un escalier roulant à contre-sens et se déplace à une vitesse relative égale à celle du défilement des marches.

11. $u_n = 1,5 + (5,5) \times (-1)^n$

12. L'équation peut s'écrire sous la forme : $(x^2 - 2)^2 = 5x^3 + 7x$. Si x prend une valeur strictement négative, le membre de gauche de l'égalité ci-dessus est positif ou nul et celui de droite est strictement négatif. L'équation ne possède donc aucune solution négative.

13. Aucun logicien n'a vu sur les fronts de ses deux collègues quatre timbres d'une même couleur, sinon il en aurait déduit que les deux timbres sur son propre front étaient de l'autre couleur. Le troisième logicien n'a pas pu voir deux timbres d'une couleur sur le front du premier et deux timbres de l'autre couleur sur le front du deuxième, sinon, il aurait pu deviner qu'il portait deux timbres de couleurs différentes (dans le cas contraire, un des deux premiers logiciens aurait dû répondre « oui »). L'un des deux premiers logiciens porte donc deux timbres de couleurs différentes et tous deux l'ont compris après que le troisième ait répondu « non ». Si le premier logicien a répondu « non » au deuxième tour, c'est que le deuxième ne porte pas deux timbres de la même couleur, ce que ce dernier a compris.

La science vous passionne ?



Abonnez-vous !

Pour la Science - 1 an - 12 numéros

Les Dossiers - 1 an - 4 numéros

74€ seulement
au lieu de ~~99,45€~~ *

soit 25%
d'économie

POUR LA
SCIENCE



En cadeau

« Haha »

ou l'éclair de la compréhension
mathématique, de Martin Gardner

En mathématiques aussi, « toujours l'inattendu arrive ». La solution d'un problème, souvent surprenante, est le fruit du « Haha », cet éclair de compréhension inventive. Martin Gardner pénètre dans la pensée du mathématicien pour nous faire vivre cette illumination.

ISBN 2-9029-1887-9, 071887,
Editions Pour la Science,
1992, Prix : 17 €.



* Prix de vente en kiosque et prix de jet

BULLETIN D'ABONNEMENT

À retourner accompagné de votre règlement à :
Service Abonnements - Pour la Science
8 rue Férou - 75278 Paris Cedex 06

Oui, je m'abonne à *Pour la Science* (12 n°) + *Les Dossiers* (4 hors-série) pour 1 an.

74 € au lieu de ~~99,45 €~~ * (prix de vente au numéro) Participation aux frais de port : 12 €/an pour l'Europe (hors France) et 25 €/an pour les autres pays.
Et je reçois en cadeau le livre « Haha » ou l'éclair de la compréhension mathématique, de Martin Gardner.

Oui, je m'abonne à *Pour la Science* seul (12 n°) pour 1 an.

54 € au lieu de ~~74,85 €~~ * (prix de vente au numéro) Participation aux frais de port : 12 €/an pour l'Europe (hors France) et 25 €/an pour les autres pays.

J'accepte de recevoir par email des informations de *Pour la Science*.

J'accepte de recevoir par email des informations des partenaires commerciaux de *Pour la Science*.

* prix en kiosque

Mes coordonnées :

Nom, prénom : _____

Adresse : _____

Ville : _____

Code postal : _____ Pays : _____

Téléphone* : _____

E-mail* : _____

Date de naissance* : _____

* facultatif

Je règle par :

Chèque à l'ordre de *Pour la Science*

Carte bancaire

Numéro de la carte

Date d'expiration

Signature obligatoire

Code de sécurité*

* Merci d'inscrire les 3 chiffres
figurant au dos de votre carte

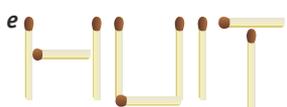
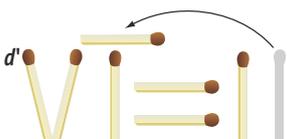
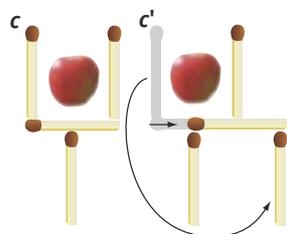
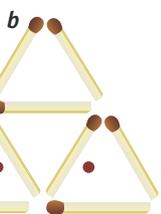
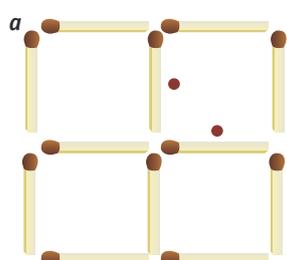
En application de l'article 27 de la loi de 1978 les informations ci-dessus sont communiquées au traitement de votre commande. Elles peuvent être utilisées à l'avenir pour des fins de publicité et de recrutement. Pour plus d'informations, vous pouvez être contacté à l'adresse ci-dessus. Toutes les données sont traitées en toute sécurité.

Jeux d'allumettes



D'après Martin GARDNER

Certains jeux de connexion posent des problèmes amusants : bien que de règles simples, les mathématiciens n'ont pas trouvé de solutions.



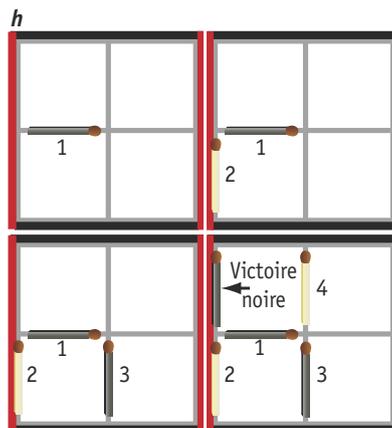
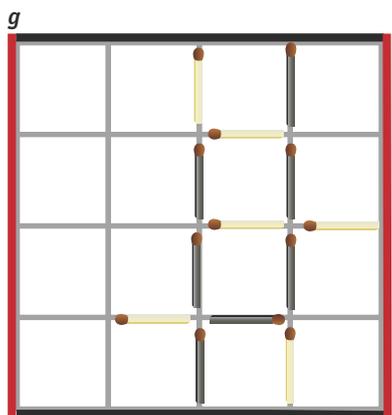
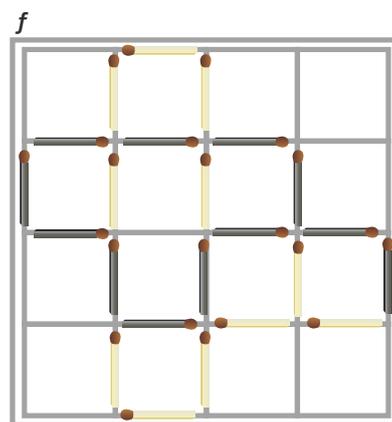
Construisez cinq carrés avec douze allumettes ! L'injonction est catégorique, et nous savons qu'il y a une solution (dans le plan, car dans l'espace, il y en a même six avec le cube). Mais, comme dans tous les problèmes d'allumettes, il y a une astuce. Dans le cas des cinq carrés, des carrés peuvent en cacher un autre... À partir de la solution *a*, pouvez-vous enlever deux allumettes pour faire deux carrés (solution : en enlevant les deux allumettes marquées d'un point rouge) ? Même problème et solution semblable pour les triangles équilatéraux en *b*. Pouvez-vous déplacer deux allumettes pour que la cerise soit en dehors du verre (*c* et solution en *c'*) ?

Un autre problème est de rétablir l'égalité de *d* en ne déplaçant qu'une allumette. La solution classique est indiquée en *d'* ($\sqrt{1} = 1$), mais il y en a une autre qui consiste à écrire $XI=II$, le membre de droite étant écrit en chiffres arabes. Une petite énigme est assimilable à un jeu de mots : comment obtenir huit (8) avec 9 allumettes ? (Il y a deux solutions, *e* en français et *e'* en chiffres romains).

Les allumettes peuvent aussi être utilisées dans des jeux de type duel. Le premier est *Connecto*, inventé par David Silverman. Les deux joueurs, qui ont des allumettes de couleur différentes, placent chacun à leur tour une allumette sur un côté d'un carré du quadrillage ; le but est de constituer une région fermée par ses allumettes. Sur la figure *f*, on voit que Noir a gagné. Le joueur qui joue en second peut-il empêcher le premier joueur de gagner, même sur un quadrillage infini ?

L'idée est d'empêcher le premier joueur de former un L, indispensable pour fermer une région. Ainsi, quand le premier joueur place une allumette verticalement, le second place son allumette selon la barre horizontale du L. Si le premier joueur place son allumette horizontalement, l'allumette du second joueur sera disposée verticalement pour faire le L : le second joueur fera au moins partie nulle. Sur une autre grille, constituée de triangles équilatéraux par exemple, le premier joueur gagne en faisant un triangle en au plus sept coups.

Dans un autre jeu, deux joueurs posent, là aussi tour à tour, une allumette sur les côtés des carrés d'un quadrillage. Le but du jeu est de relier pour Noir les deux côtés noirs du quadrillage (comme en *g*) et pour Rouge les deux côtés rouges. Dans ces jeux de type duel, s'il existe une stratégie gagnante, c'est pour le premier joueur, car s'il existait une stratégie gagnante pour le second joueur, le premier se mettrait dans la position du second joueur en jouant n'importe où, et le fait d'avoir placé une allumette ne peut lui nuire. Sur des quadrillages de quatre (voir une partie en *h*) et de neuf carrés le premier joueur gagne, mais, pour des quadrillages plus grands, la tactique est inconnue.



La table bancale

Jean LEFORT

Soyons rationnels : faisons tourner les tables pour les stabiliser !

I fait beau et vous décidez de sortir votre table ronde. Alors que, sur le parquet de votre séjour, elle représentait un modèle de stabilité, voilà qu'une fois sur la terrasse, elle est bancale. Vous la déplacez vers la droite, vers la gauche. Pas moyen de l'avoir stable, et cela vous énerve.

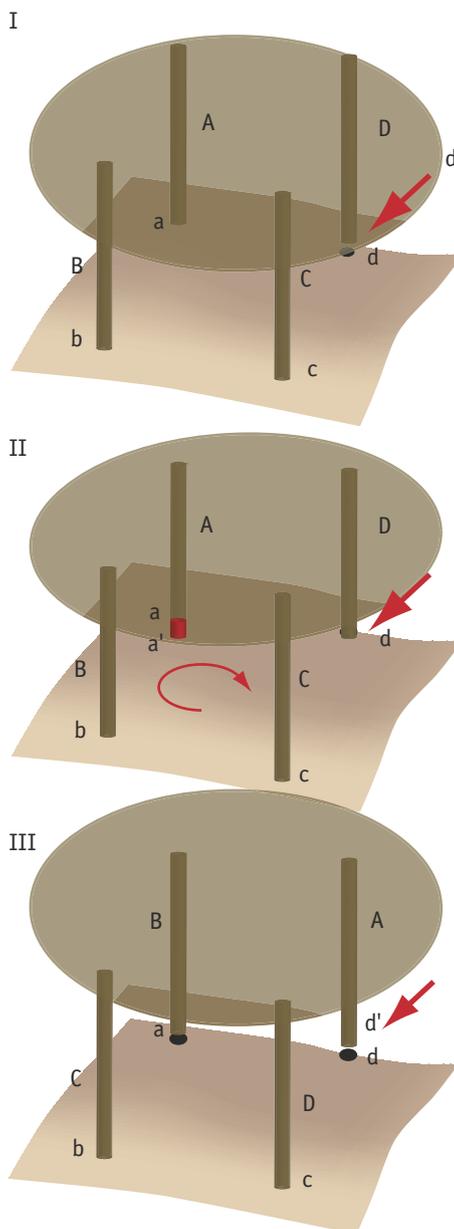
Heureusement, votre ami mathématicien, ayant noté que les quatre pieds sont aux sommets d'un carré, vient à votre secours : il tourne doucement votre table, et là, miracle, il n'a pas fait un quart de tour qu'elle est parfaitement calée. Nul besoin de placer un petit caillou ni de plier et replier un bout de carton pour le coincer sous un pied.

Le miracle n'en est pas un : il repose, comme la table, sur un raisonnement mathématique utilisant le théorème des valeurs intermédiaires. Ce théorème énonce que si un phénomène variable continu passe d'une valeur a à une valeur b , alors il prend au moins une fois toutes les valeurs entre a et b . Or, quelles que soient les irrégularités de votre terrasse, sa surface est continue à notre échelle. La manipulation de pensée est exposée dans la légende de la figure ci-contre : comme le pied A passe d'une position au-dessous du sol à une position au-dessus, il passe par une valeur intermédiaire où il est juste en contact avec le sol, et la table est alors stabilisée.

D'un point de vue pratique, il suffit de déplacer doucement la table de manière à amener les extrémités des pieds B et C en a et b , en gardant le pied A sur le sol. Moins d'un quart de tour après, la table sera stabilisée. L'horizontalité du plateau n'est pas assurée, mais l'angle ne dépend que des irrégularités de votre terrasse et des dimensions de la table ; l'écart à l'horizontal n'est pas bien grand dans les cas pratiques.

Le problème ne se pose pas avec une table à trois pieds, qui est toujours stable mais pas plus horizontale qu'une table carrée. Et qu'en est-il d'une table rectangulaire, elle aussi d'usage courant ? Les mathématiciens ne savent pas encore répondre à cette question. La réponse n'est pas évidente, car il n'est pas toujours possible de stabiliser une table dont les quatre pieds (supposés dans un même plan) ne sont pas sur un même cercle. En effet, si le sol est une calotte sphérique, le plan des pieds coupe le sol suivant un cercle sur lequel doivent se trouver les pieds.

Jean LEFORT est ancien professeur de mathématiques en classe préparatoire et ancien animateur de l'IREM de Strasbourg.



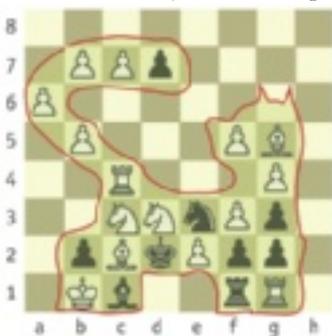
STABILISATION DE LA TABLE PAR ROTATION. (I) On suppose que les pieds A, B, C sont sur le sol en a, b, c et que le pied D est au-dessus du sol en d' , au-dessus de d . (II) Par la pensée, on enfonce A jusqu'en a' , b et c restant fixes, pour avoir B, C et D sur le sol en b, c et d . (III) Puis on fait tourner la table, toujours par la pensée, pour amener D en c , C en b et B en a , en maintenant ces trois pieds sur le sol. Alors A vient en d' , au-dessus du sol (c'est la première position à l'échange près des pieds).

Ces défis délicieux

Philippe BOULANGER

Les problémistes, comme les mathématiciens, proposent des problèmes et les résolvent. Certains problèmes sont des prodiges d'ingéniosité où se superposent des scénarios géométriques ou dramatiques.

Les problèmes d'échecs ont leur terminologie et leurs créateurs talentueux, dont le prodigieux Sam Loyd, « le roi du problème d'échecs », qui ajoutait au problème brut, une particularité géométrique ou une histoire. Nous commencerons par les jumeaux de Kilkenny, mais, avant, pour encourager le lecteur, nous lui poserons le problème représenté sur l'échiquier à côté du titre. C'est aux Blancs de jouer et *ils ne peuvent pas ne pas faire mat!*



Sam Loyd évoque la comptine irlandaise des *Chats de Kilkenny* qui raconte que des chats se seraient battus avec tant de hargne que seules leurs griffes et leurs queues seraient restées à la fin du combat. Ici les Blancs font mat en 4 coups dans la position de gauche comme dans la position de droite déplacée horizontalement d'une case vers la gauche.

Les deux problèmes sont jumeaux et figuratifs : l'essai de l'un est la clef de l'autre et réciproquement.

Essai pour le premier problème : **1.** C ϵ 4 + – R \times ϵ 2 ; **2.** C \times g3 + – Rd2 et si **3.** b8 = D, il manque une colonne à gauche de a6 pour que cette Dame fasse mat.

Solution : **1.** b8 = C. Si **1.** – d5 ; C ϵ 6, etc. Si **1.** – T \times Tg1 ; **2.** C \times d7 – f1 = C ; Cd7 ζ 5, etc.

Essai pour le second problème : **1.** ζ 8 = C – T \times Th1 **2.** C \times ϵ 7 – g1 = C et si **3.** Cd5 (menaçant **4.** Cf4 échec et mat) – Pat, le Cg1 ne pouvant jouer un coup sur une colonne à droite de la colonne h.

Solution : **1.** Cf4 + – R \times f2 ; **2.** C \times h3 + – Rg3 (ou **2.** – Ré2 ; ζ 8 = D ; etc.). **3.** Cf5, etc.



Un vrai roi est imperturbable

Sam Loyd avait l'art de la mise en scène de problèmes : examinons celui du roi de Suède. Le roi de Suède, Charles XII était, en 1713, assiégé par les Turcs dans la ville de Bender. Il trompait son ennui en jouant aux échecs avec son ministre Grothusen. La partie se trouvait dans la position de l'échiquier ci-contre et le roi, avec les Blancs, annonçait mat en 3 coups (par **1.** T \times g3 – F \times g3 (1. – F \times Ce1 ; **2.** Th3 + – Fh4 ; **3.** g4 mat) **2.** Cf3 ! – F \times h2 ; **3.** g4 mat) quand une balle perdue faucha le Cavalier blanc qui sauta hors de l'échiquier.

Grothusen proposa au roi de le remettre à sa place, mais le roi répondit : « Superflu, il y a maintenant mat en 4 coups. » La suite de coups est : **1.** h \times g3 – Fe3 (1. – F \times g3 ; **2.** T \times g3 et **3.** Th3 mat) ; **2.** Tg4 – Fg5 ; **3.** Th4 + – F \times h4 ; **4.** g4 mat)

Une seconde balle frappa alors le pion blanc h2 qui disparut, ce qui ne décontenança pas Charles XII :

« J'ai grand plaisir à vous annoncer que toute l'artillerie turque ne me fera pas perdre la partie : il y a maintenant mat en 5 coups ! : **1.** Tb7 – Fe3 (1. – Fg1 ; **2.** Tb1 – Fh2 ; **3.** Te1 – Rh4 ; **4.** Rg6 – Rg4 (ou h5) ; **5.** Te4 mat) **2.** Tb1 – Fg5 ; **3.** Th1 + – Fh4 (Les noirs sont pat) **4.** Th2 – gxh2 ; **5.** g4 mat.»

L'histoire ne se finit pas là : après des années, un problémiste allemand a trouvé une prolongation au problème de Sam Loyd et remarqué que si la première balle avait détruit la Tour blanche au lieu du Cavalier, Charles XII aurait un mat en 6 coups... La solution est **1.** Cf3 – Fé1 ; **2.** Cx ϵ 1 – Rh4 ; **3.** h3 – Rh5 ; **4.** Cd3 – Rh4 ; **5.** Cf4 – h5 ; **6.** Cg6 mat.

Relatons une visite de Danaé à Caïssa, la muse des échecs. C'est sous la forme d'une pluie d'or que Zeus rejoignit Danaé pour la conquérir et lui faire un enfant, Persée.

L'Américain James Marshall (1877-1944) était une figure originale des échecs. Champion des États-Unis de 1909 à 1936, c'était plus un tacticien qu'un stratège et il n'hésitait pas à « mal jouer » pour mettre son adversaire dans une position impossible ; alors il sauvait la mise par un coup paradoxal, digne d'un grand problémiste.



La position ci-contre a été réalisée au cours d'une partie en 1912 au tournoi de Bratislava. Marshall vient de placer sa Dame noire en g3 et l'enthousiasme des spectateurs fut tel que certains, excités, jetèrent des pièces d'or sur l'échiquier. Le coup menace – Dh2 mat. Voyons les coups blancs possibles. Si h2×Dg3, Cc2 mat. Si les Blancs jouent f2×Dg3, les

Noirs jouent Cc2 +, les Blancs jouent Rh1 et les Noirs T×Tf1 mat. Si les Blancs jouent f3, les Noirs jouent Cc2 suivi du mat. Enfin si la Dame blanche prend la Dame noire, D×Dg3, alors Cc2 + Rh1 suivi de C×Dg3, les Blancs prennent par f2×Cg3, suivi de la punition : T×Tf1 mat...

Le génie multiforme de Lasker

Emanuel Lasker fut champion du monde d'échecs de 1894 à 1921, le plus long règne pour un champion d'échecs. Pour Lasker, jouer aux échecs était un métier et il était souvent à court d'argent, aussi ne jouait-il que si l'enjeu financier était suffisant. Il lui arriva durant sa carrière d'abandonner pendant quelque temps les échecs : il fut ainsi membre de l'équipe d'Allemagne de bridge au Championnat du monde et il termina son doctorat en mathématiques pendant son règne sur les échecs.

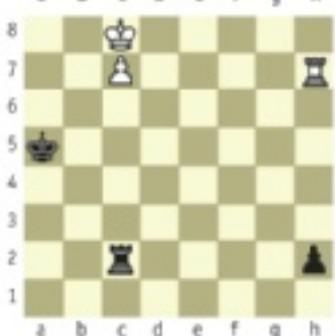
Dans les échecs, Lasker introduisit un nouveau facteur : le caractère de l'adversaire dans le choix d'un coup. Sa spécialité consistait à mettre l'adversaire en confiance. Il se plaçait dans une position défensive jusqu'au moment où son



adversaire, ne sentant pas le danger, se découvrait un peu trop. Lasker lançait alors une contre-attaque, punissant le relâchement de son adversaire. Cette technique est illustrée par la position obtenue en 1898 contre Victor Wahltuch, en Angleterre. Quel est le coup décisif de Lasker ?

Le champion du monde laisse sa Dame en prise et joue le coup gagnant Ta1 – d1 ! Ensuite les mouvements du cavalier f5 ont raison des pièces et du Roi.

Emmanuel Lasker a aussi été un compositeur de problèmes qui ont une saveur mathématique, car dans la position indiquée à gauche, la symétrie inciterait à renoncer au gain et à proposer la partie nulle. En fait,



les Blancs gagnent par une savante manœuvre d'escalade indiquée ici.

1. Rb7 – Tb2 + ; 2. Ra7 – Tc2 ; 3. Th5 + – Ra4. 4. Rb7 – Tb2+ ; 5. Ra6 – Tc2 ; 6. Th4 + – Ra3 ; 7. Rb6 – Tb2 + (Si 7. –Rb3 ; 8. Rb7) 8. Ra5 – Tc2 ; 9. Th3 + – R joue : T×h2 et gagne.

Lasker est un vrai maître à qui nous laissons la parole : « On a dit que l'homme se distingue de l'animal par le fait qu'il achète plus de livres qu'il ne peut en lire. Je voudrais suggérer qu'inclure à la liste des livres quelques livres d'échecs rendrait la distinction manifeste. »

Problèmes de Smullyan et Fabel

Le philosophe et mathématicien Raymond Smullyan a inventé cet élégant problème d'échecs quand il était étudiant à l'Université de Chicago, en 1957. Il s'agit d'un problème d'analyse rétrograde : de tels problèmes ne peuvent être résolus qu'en rétablissant les coups autorisés et uniques qui précèdent la position indiquée. La position indiquée sur la figure ci-contre est une position légale, c'est-à-dire qui peut être obtenue avec les règles du jeu.

Dans cette position, le Roi blanc, a été enlevé de l'échiquier. Les deux questions sont : où était le Roi blanc et quel a été le dernier mouvement des Blancs ?

Une solution est donnée sur l'échiquier en dessous. Les mouvements sont (premier coup noir) : ... 1. Fd5 +. 2. c2 – c4 ; b5 (e. p.) + 3. R×c3+, et si nous enlevons le Roi blanc, nous trouvons la position indiquée. Je ne sais si cette solution est unique.

Nous terminerons par un dernier problème posé par Karl Fabel, pendant du premier illustré à côté du titre : Blanc doit jouer sans faire mat ! La solution est Tb6. Le Roi noir est mis en échec par le fou blanc, mais les Noirs peuvent le prendre avec leur tour en b7. Qu'il y ait deux fous blancs résulte évidemment de promotions...

Le domaine des échecs est vaste et nous envisagerons d'autres particularités mathématiques liées aux mouvements des pièces d'échecs dans l'article *Échec et Dames*, page 106.



Philippe BOULANGER est conseiller scientifique de la revue *Pour la Science*.

Petit PHILIDOR, *Le petit Archimède*, n° 23, janvier 1976.

F. LE LIONNAIS, *Tempêtes sur l'échiquier*, Pour la Science-Belin, 1981.

M. GARDNER, *New mathematical diversions*, MAAS, 1995.

G. HAMILTON, *Pi in the sky* n°10, printemps 2007.

Échecs et dames

D'après Martin GARDNER

Le jeu « Cincez la Dame » et les dispositions des Dames sur l'échiquier nous entraînent dans les recoins de la théorie des nombres.



Universitätsbibliothek Heidelberg

Le jeu que nous dénommerons « Cincez la Dame » se joue sur un échiquier de taille quelconque. La case inférieure gauche est la case gagnante. Le premier joueur dépose une Dame sur n'importe quelle case des deux bandes orange limitant l'échiquier (voir la figure 1a). Chaque joueur, à tour de rôle, déplace la Dame comme au jeu d'échecs selon l'une des trois directions pointées sur la figure.

Le mathématicien Rufus Isaacs (1914-1981) a déterminé par analyse rétrograde une stratégie gagnante pour le premier joueur. Si le joueur dont c'est le tour de jouer a la Dame placée sur la colonne, la ligne ou la diagonale contenant la case étoilée, alors il a gagné. Ces cases sont coloriées en vert sur la figure 1b. Les cases colorées en rouge de la figure 1c sont perdantes pour le joueur qui doit jouer à partir d'une de ces positions : toutes les cases coloriées en vert qui amènent en un coup à ces positions rouges sont gagnantes pour le joueur qui doit jouer. Ce faisant, en coloriant toutes les cases qui mènent à ces cases rouges on voit apparaître sur l'échiquier 8×8 deux nouvelles cases rouges. Le premier joueur gagne en plaçant la Dame sur une des deux cases perdantes pour le joueur qui doit jouer à partir d'elles. Cette analyse s'étend à n'importe quelle taille d'échiquier.

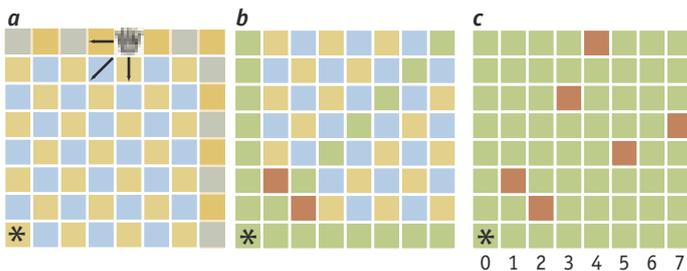
L'étonnant est que ce jeu est équivalent à un ancien jeu chinois réanalysé par le mathématicien Wilhem Wythoff (1865-1939) en 1907. On part de deux tas contenant chacun un nombre arbitraire de pions. Le jeu consiste à enlever n'importe quel nombre de pions dans n'importe quel tas ou un nombre égal de pions dans les deux tas (ce qui est interdit dans le jeu de Nim classique). Le gagnant prend le dernier pion. La stratégie gagnante du jeu est de réduire les tas de pions à un couple de nombres correspondant à une case perdante. Si le nombre de pions des deux tas de départ correspond à une case perdante, le premier joueur perd : il est contraint de laisser une case gagnante à son adversaire, lequel le ramènera à une case perdante.

Notons que les cases perdantes sont symétriques par rapport à la diagonale passant par la case étoilée et que leurs coordonnées sont interchangeables : aussi peut-on ne considérer qu'une seule suite de cases perdantes, celles du haut par exemple. Les suites A et B constituées par les coordonnées des cases perdantes, associées à leur rang (voir la figure 2),

ont des propriétés intéressantes. Tout nombre de la suite B est égal au nombre associé de la suite A additionné de son rang et tous les nombres entiers positifs apparaissent une fois et une seule dans les deux suites.

Il existe une propriété miraculeuse : les nombres de la suite A sont simplement les parties entières des multiples du nombre d'or $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ et la suite B est la suite des parties entière de ϕ^2 . Le nombre d'or, un nombre irrationnel, était nommé par les mathématiciens grecs « le rapport des moyens et des extrêmes ». En effet, si nous divisons un segment de droite en deux parties a et b telles que le rapport de la longueur du segment a à celle du segment b et égale au rapport de la longueur du segment entier à celle du segment a , nous avons divisé le segment dans le rapport du nombre d'or.

Ce nombre, considéré parfois comme la façon la plus harmonieuse de diviser un segment, a donné une littérature pléthorique et souvent extravagante... Deux suites croissantes d'entiers positifs qui, réunies, comprennent tous les entiers positifs une fois et une seule sont dénommées des suites complémentaires. En 1926, le mathématicien canadien Sam Beatty publia un étonnant résultat : tout nombre irrationnel k engendre deux suites complémentaires. La suite A est constituée des parties entières des multiples de k et la suite B des parties entières des multiples de $k/(k-1)$. Les lecteurs pourront se convaincre que les formules de Beatty engendrent bien des suites complémentaires avec $\sqrt{2}$, π , e , etc...



1. UNE POSITION DE DÉPART du jeu « Cincez la Dame » (a) et la construction des premières cases perdantes (b et c).

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Suite A	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	22	24
Suite B	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36	39

2. LES DEUX SUITES DE WYTHOFF. Les nombres de la suite B sont ceux de la suite A additionnés du rang de ces nombres.

La suite de Fibonacci est 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, où chaque nombre est la somme des deux nombres précédents. Le quotient de deux termes successifs de la suite de Fibonacci tend vers le nombre d'or. Aussi, lorsqu'apparaît le nombre d'or, les nombres de la suite de Fibonacci ne sont pas loin.

À partir de cette suite, on peut obtenir la suite (1-2), (3-5), (8-13)... et on démontre que ces couples constituent tous les coordonnées des cases perdantes du jeu « Coinchez la Dame » ! La première paire qui n'apparaît pas dans cette liste correspond à la case perdante (4-7), et on obtient d'autres cases perdantes en prenant pour deux premiers nombres d'une suite de Fibonacci les nombres 4 et 7 (ces nombres appartiennent à la suite de Lucas, 2, 1, 3, 4, 7, 11...). La première case perdante non trouvée est la case (6-10) qui engendre une autre infinité de cases sûres, et ainsi de suite.

Il existe encore bien d'autres propriétés des coordonnées des cases perdantes... mais nous allons aborder un autre sujet.

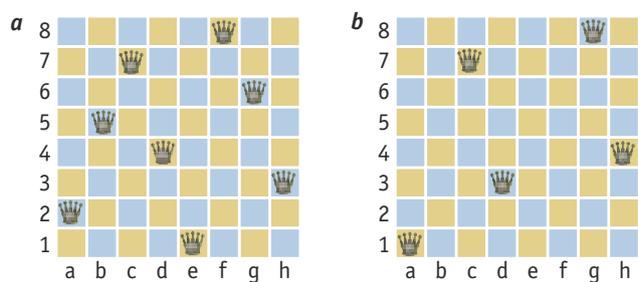
Dames dominatrices et théorie des nombres

Le grand rival de l'Américain Sam Loyd, était le Britannique Henry Dudeney, de goûts plus mathématiques. Ce fut le premier à poser le problème encore étudié aujourd'hui à travers ses généralisations : combien de Dames peut-on au maximum disposer sur un échiquier sans qu'aucune Dame ne soit en prise par une autre ? La réponse est 8 pour un échiquier 8×8 et n pour un échiquier $n \times n$. Une solution est indiquée ci-contre et il y a douze configurations possibles en éliminant les rotations et les symétries. La suite des nombres de configurations en fonction de la taille de l'échiquier est une des 166 suites de l'encyclopédie de Sloane (voir *Jeux de suites*, par Éric Angelini, dans ce dossier). Un autre problème de Dudeney est : « Quel est le nombre minimal de Dames que l'on doit mettre sur l'échiquier pour que toutes les cases soient attaquées ? » La réponse est 5 (voir la figure 3b).

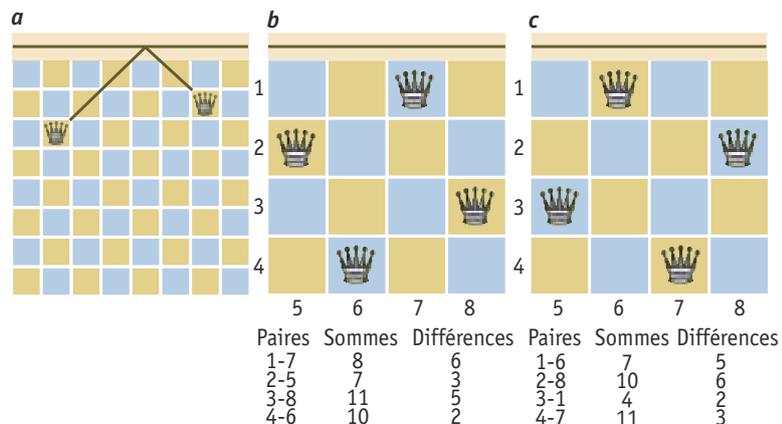
Michael Slater et David Klaner ont découvert qu'un problème de la théorie des nombres était résolu par une variante du problème du placement du maximum de Dames sur l'échiquier de façon qu'aucune ne soit en prise. Dans cette variante, on ajoute une bande réfléchissante au-dessus de l'échiquier de façon que non seulement les Dames ne s'attaquent pas directement, mais qu'elles ne soient pas non plus en prise après une réflexion spéculaire sur la bande réfléchissante.

Le problème concernait l'ensemble des entiers de 1 à $2n$ scindé en deux sous-ensembles, les entiers de 1 à n et les entiers de $n + 1$ à $2n$. Pour quelles valeurs de n peut-on associer à chaque nombre de l'un des sous-ensembles un nombre de l'autre de façon que les $2n$ sommes de ces deux nombres et les différences de ces nombres soient toutes distinctes ?

Il n'est pas difficile de voir pourquoi les deux problèmes sont isomorphes. L'ensemble des nombres écrits sur les bords de l'échiquier est l'ensemble des nombres compris entre 1 et $2n$. Les numéros des lignes des Dames appartenant à une solution forment un premier sous-ensemble, les numéros des colonnes constituant le second sous-ensemble. Si



3. NOMBRE MAXIMAL DE DAMES que l'on peut placer sur l'échiquier sans qu'elles se mettent en prise (a) et nombre minimal de Dames attaquant toutes les cases de l'échiquier (b).



4. ATTAQUE PAR RÉFLEXION (a) et les deux solutions au problème de partage pour $n = 4$ obtenues par la disposition des Dames (b et c).

deux Dames s'attaquent le long d'une ligne ou d'une colonne, alors un nombre sera répété dans l'un des sous-ensembles, ce qui est interdit. Les deux sous-ensembles seront constitués l'un des nombres de 1 à n et le second des nombres de $n + 1$ à $2n$. Si deux Dames s'attaquent selon une diagonale ascendante vers la droite, les sommes de leurs coordonnées seront identiques. Si deux Dames sont en prise selon une diagonale descendante vers la droite, les valeurs absolues des différences de leurs coordonnées seront identiques. Si deux Dames s'attaquent par réflexion sur la bande, la somme des coordonnées de l'une sera égale à la valeur absolue de la différence des coordonnées de l'autre, ce qui est aussi interdit. Si aucun de ces interdits n'est enfreint, alors nous avons une solution du problème, comme pour $n = 4$, représenté sur la figure 4.

Pour n égal à 5, il y a quatre solutions obtenues par rotation et symétrie à partir de la configuration des Dames, pour n égal à 6, il n'y a pas de solution, pour n égal à 7 une configuration de Dames engendre deux solutions, et pour n égal à 8 il existe dix solutions au problème numérique.

Martin GARDNER a fait ses études à l'université de Chicago et a tenu la rubrique « Mathematical Games » de Scientific American de 1956 à 1981.

<http://www.research.att.com/~njas/sequences/?q=queen&sort=0&fmt=0&language=english&go=Search>

M. GARDNER, *Jeux mathématiques*, in *Pour la Science* n° 1, 1977.

M. GARDNER, *Jeux mathématiques*, in *Pour la Science* n° 22, 1979.

E. LUCAS, *Les récréations mathématiques*, tome I, Blanchard, 1977.

Le *Loony Loop*

Jean LEFORT

La topologie et un bon codage mathématique des opérations à mener résolvent ce casse-tête dont la structure entortillée peut effrayer.



Connu sous le nom de *Loony Loop*, terme que nous pourrions traduire par *La boucle lunatique*, le jeu consiste à séparer une boucle de ficelle d'un corps rigide d'arceaux métalliques enchevêtrés. Ce corps est formé d'un axe sur lequel viennent se raccorder quatre arceaux, deux petits et deux grands. Les arceaux de même taille sont tête-bêche et, partant d'un côté de l'axe central, chaque arceau le contourne par l'autre côté, ce qui fait que les deux arceaux se croisent. Les grands arceaux englobent les petits en ayant une position inverse. Ce casse-tête s'apparente aux casse-tête topologiques.

On se doute bien qu'il existe une solution, sinon le jeu ne se vendrait pas, et il est intéressant de voir *a priori* que le jeu n'est pas impossible au moyen d'une expérience de pensée. Si on déforme par la pensée les tiges métalliques, il est possible de les aligner vers l'extérieur (au-delà des boules) et ainsi de libérer la boucle de ficelle sans difficulté, comme indiqué ci-dessous pour deux arceaux. Le but est alors de trouver un mouvement de la ficelle qui soit « l'inverse » de cette déformation des tiges.

Comme d'habitude, faire intervenir les mathématiques pour résoudre ce casse-tête, c'est trouver un codage symbolique, le plus simple possible, sur lequel on puisse faire des manipulations formelles, des généralisations, des prévisions. Or ici on se heurte à un problème infini, puisque

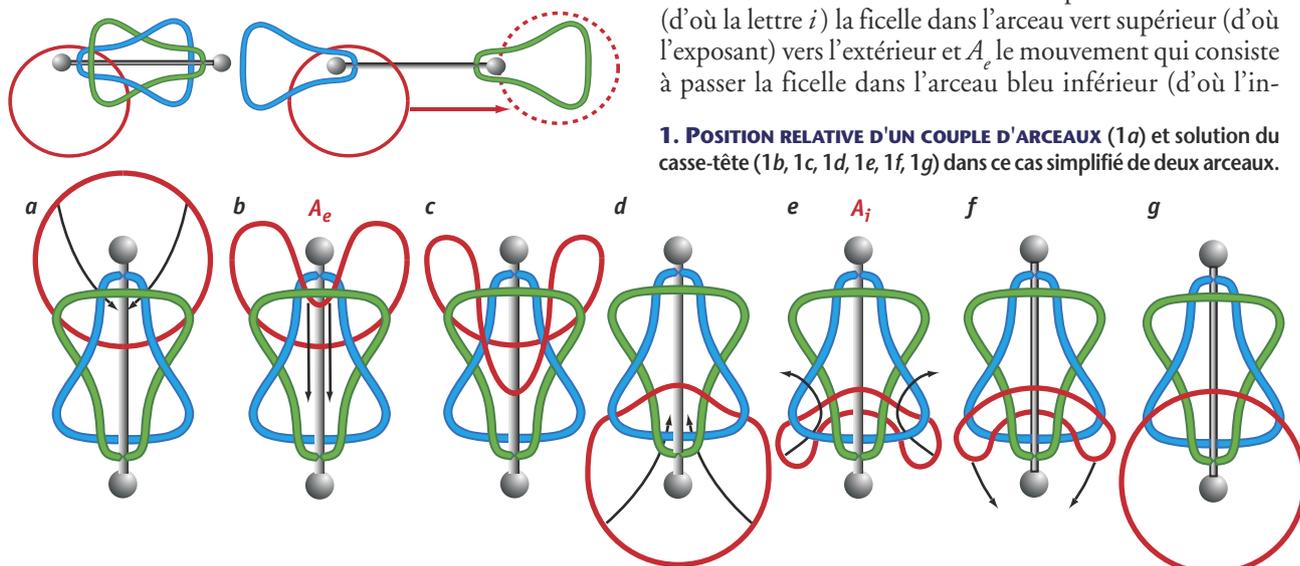
la boucle de ficelle peut se tordre dans tous les sens. Cependant, comme dans tous les problèmes topologiques, ce qui est important c'est de savoir si la ficelle passe au-delà ou en deçà de telle ou telle tige quand on fait référence à l'axe du jeu. Dans le cas présent, on va profiter de la symétrie du corps du jeu par rapport au plan perpendiculaire à l'axe qui joint les deux boules.

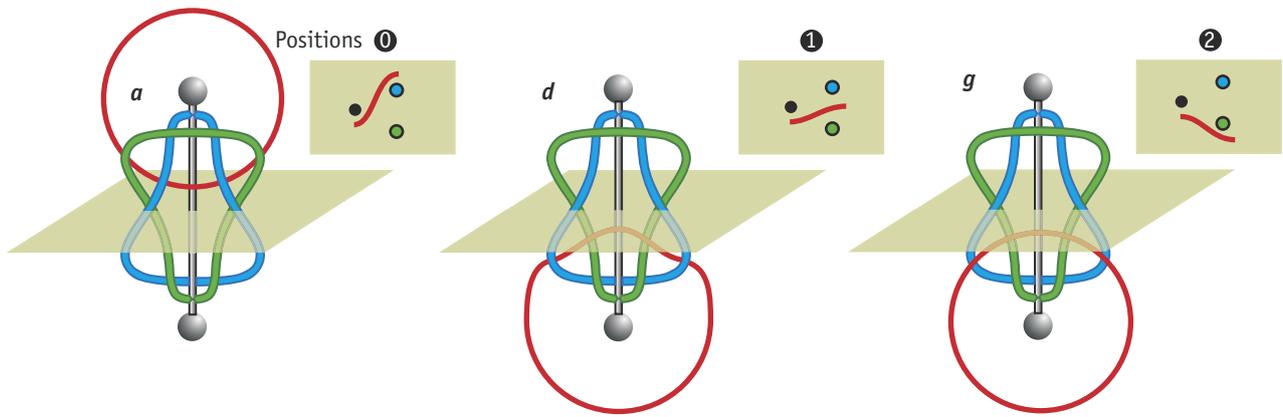
Pour mieux comprendre la résolution de ce problème, nous allons considérer un *Loony Loop* plus simple qui n'est fait que de deux arceaux métalliques : la figure 1 indique la façon de libérer l'anneau de ficelle. Nous partons de la position 1a où la ficelle est vers soi, puis nous effectuons les mouvements 1b et 1c qui consistent à passer la ficelle dans l'arceau supérieur par l'intérieur, et nous obtenons la position 1d. Enfin, nous passons la ficelle dans l'arceau inférieur par l'extérieur, ce qui dégage la ficelle, comme l'indiquent les positions 1f et 1g.

Simplifions encore la représentation pour ne garder que la moitié droite de la section du casse-tête par un plan médian, ainsi que la position de la ficelle. Sur la figure 2, on a représenté les schémas correspondant aux principales étapes de la solution. En elles-mêmes, les seules positions de la ficelle renseignent peu sur les manœuvres à effectuer ; une légère réflexion permet de trouver ces manœuvres, mais il est plus simple de préciser la façon de passer d'une position à l'autre.

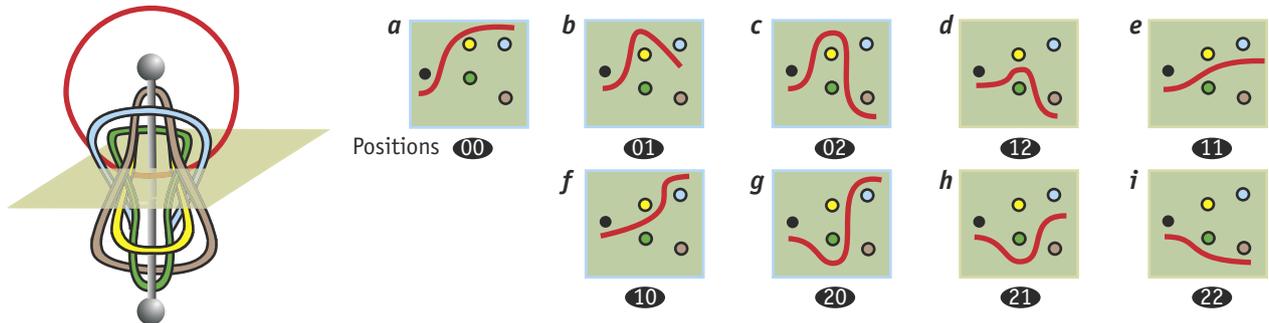
Notons A^i le mouvement faisant passer de l'intérieur (d'où la lettre *i*) la ficelle dans l'arceau vert supérieur (d'où l'exposant) vers l'extérieur et A^e le mouvement qui consiste à passer la ficelle dans l'arceau bleu inférieur (d'où l'in-

1. POSITION RELATIVE D'UN COUPLE D'ARCEAUX (1a) et solution du casse-tête (1b, 1c, 1d, 1e, 1f, 1g) dans ce cas simplifié de deux arceaux.





2. SCHÉMATISATION DE LOONY LOOP. En noir, l'axe (la tige centrale); en bleu, les sections des arceaux supérieur bleu et inférieur vert par le plan médian et en rouge, la boucle de ficelle. En vert, la symbolisation par la section du plan médian.



3. LE LOONY LOOP À DOUBLE ARCEAU : la numérotation des positions successives dans le plan médian indique la solution du problème et correspond au code de Gray et donne la solution du puzzle.

dice) de l'extérieur (d'où la lettre e) vers l'intérieur. La lettre A n'est là que pour rappeler qu'il s'agit de la première paire d'arceaux. En notant 0, 1 et 2 les trois positions successives de la ficelle, nous résumons le dégagement de l'anneau par : $0 - A_e - 1 - A^i - 2$.

Avec deux paires d'arceaux

Considérons maintenant le cas classique du *Loony Loop* avec deux paires d'arceaux. Initialement, c'est-à-dire quand la boucle de ficelle n'entoure que l'axe central, nous avons la représentation suivante symbolisée à droite. On remarque que tout se passe comme si nous avions rajouté une paire d'arceaux à l'intérieur de la précédente en inversant les positions (l'arceau supérieur est maintenant tourné vers le bas).

Notons A les grands arceaux et B les petits, la notation B_e signifie alors franchissement du petit arceau inférieur par l'extérieur. Notons 0 la position de la ficelle au-dessus d'un arceau inférieur, 1 la position entre les deux arceaux de même taille et 2 la position de la ficelle au-dessus de l'arceau supérieur. La position initiale est ainsi notée 00, et la suite des positions permettant de libérer la boucle de ficelle est ensuite : 01 - 02 - 12 - 11 - 10 - 20 - 21 - 22. C'est exactement la numération ternaire réfléchie, ou code de Gray en base trois (pour la définition de ce code, voir *La tour de Hanoï*, dans ce dossier). Pour être précis, donnons les mouvements entre chaque position :

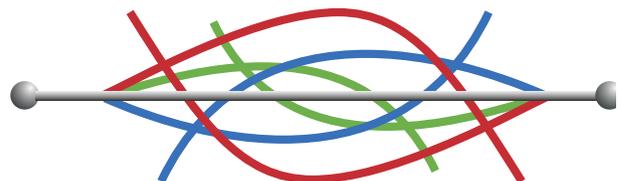
00 - (A_e) - 01 - (A^i) - 02 - (B_e) - 12 - (A^e) - 11 - (A^i) - 10 - (B^i) - 20 - (A_e) - 21 - (A^i) - 22.

Si l'on veut réengager la boucle de ficelle, il faut lire la séquence à l'envers en échangeant les lettres i et e . Même si cela ne se vend pas dans le commerce, on peut généraliser le *Loony Loop* avec un plus grand nombre d'arceaux. On aura compris que la suite des positions est donnée par

la suite des nombres d'un code de Gray en base trois. Il y aura donc 27 positions pour trois paires d'arceaux, 81 pour quatre paires, etc.

Il est plus utile de connaître l'évolution des mouvements.

Notons M_n la suite des mouvements pour n paires d'arceaux et M_n^* où l'on a modifié les hauteurs des indices i et e , ainsi (A_i) - (B^e) devient (A^i) - (B_e). Alors $M_{n+1} = M_n E_{n+1} M_n^* I_{n+1} M_n$ où E_{n+1} est un engagement par l'extérieur dans le $n+1$ ème arceau, l'intérieur si $n+1$ est pair, le supérieur si $n+1$ est impair et, de même, I_{n+1} est un engagement par l'intérieur dans le $n+1$ ème arceau, mais le supérieur si $n+1$ est pair et l'intérieur s'il est impair. Ainsi, pour trois paires d'arceaux, nous avons le codage suivant, où A représente les grands arceaux, B , les moyens et C , les petits :
 000 - (A_e) - 001 - (A^i) - 002 - (B_e) - 012 - (A^e) - 011 - (A_e) - 010 - (B^i) - 020 - (A_e) - 021 - (A^i) - 022 - (C_e) - 122 - (A^e) - 121 - (A_e) - 120 - (B^e) - 110 - (A_e) - 111 - (A^i) - 112 - (B_e) - 102 - (A^e) - 101 - (A^i) - 100 - (C_i) - 200 - (A_e) - 201 - (A^i) - 202 - (B_e) - 212 - (A^e) - 211 - (A_e) - 210 - (B^i) - 220 - (A_e) - 221 - (A^i) - 222.



Il ne reste plus qu'à construire un tel *Loony Loop* ! L'allure schématique est indiquée ci-dessus.

Jean LEFORT est ancien professeur de mathématiques en classe préparatoire, ancien animateur de l'IREM de Strasbourg.

Le *Loony Loop* est en vente sous le titre de *Gordian Knot* sur le site : <http://www.pentangle-puzzles.co.uk>.

Puzzles dans l'espace

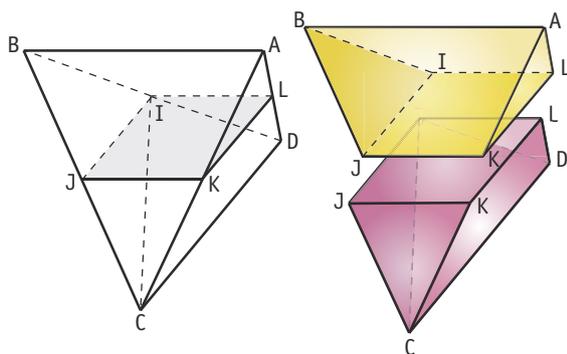
Jean LEFORT

Le puzzle dans l'espace est beaucoup plus difficile que dans le plan, pratiquement, car la vision dans l'espace est un talent et, théoriquement, car la reconstruction n'est pas toujours possible.

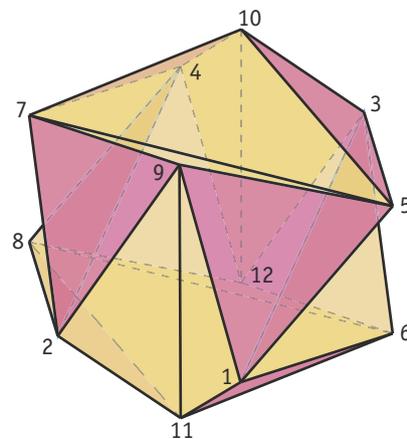
D issection et réassemblage de figures, comme nous venons de le faire dans le cas du plan, peuvent tout aussi bien s'imaginer dans l'espace. Cependant, passer de la dimension deux à la dimension trois présente à la fois des difficultés conceptuelles (on ne voit pas tous les côtés en même temps et certaines pièces peuvent rester cachées au sein du volume final) et des difficultés mathématiques (il ne suffit pas que deux polyèdres aient le même volume pour qu'on puisse décomposer l'un en morceaux qui, convenablement réassemblés, donnent l'autre).

Le plus simple des puzzles spatiaux que je connaisse est formé de deux pièces identiques en forme d'enclume qu'on demande d'assembler pour réaliser une pyramide à base triangulaire (un tétraèdre régulier pour les mathématiciens). La difficulté mathématique est quasi nulle et ceux qui ont une bonne formation à la vision dans l'espace (mathématiciens, architectes, mécaniciens) trouvent le plus rapidement, même si tous finissent par y parvenir. Cela met bien en évidence la difficulté conceptuelle des puzzles en dimension trois.

Empiler des cubes pour créer des solides s'apparente à la mesure des volumes : mesurer en mètres cubes, c'est comparer un volume donné à un certain nombre de cubes de un mètre de côté. La question est de savoir si l'on peut toujours décomposer un polyèdre (un solide n'ayant que des faces planes) en des morceaux qui, rassemblés sans trou, reconstitueront un cube.



1. LE PUZZLE TÉTRAÉDRIQUE est formé de deux « enclumes » identiques ABIJKL que l'on assemble en un tétraèdre ABCD en faisant coïncider les faces carrées avec la bonne orientation.



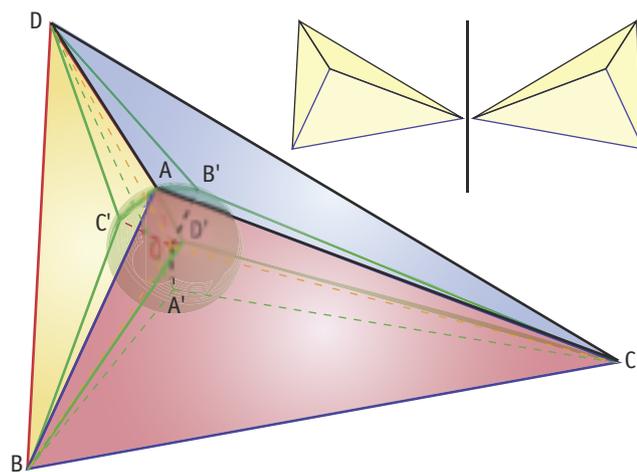
Nous avons vu cette procédure pour les polygones (voir *Dissections et puzzles*, par Jean-Pierre Friedelmeyer, dans ce dossier). Or nous nous heurtons à une impossibilité à laquelle s'est déjà confronté Euclide : dans son livre XII, pour le calcul du volume d'une pyramide qui occupe les propositions 3 à 8, il a recours à une division en une infinité de prismes (proposition 4). Cela revient à faire un calcul intégral, un outil bien lourd pour un objet aussi simple qu'une pyramide. Comme pendant 20 siècles les mathématiciens ne font pas mieux, Hilbert, lors du congrès de Paris en 1900, énonce son troisième problème : il demande de démontrer que, dans le cas général, on ne peut pas découper un polyèdre donné en un nombre fini de morceaux pour reconstituer un autre polyèdre.

De la pyramide au cube

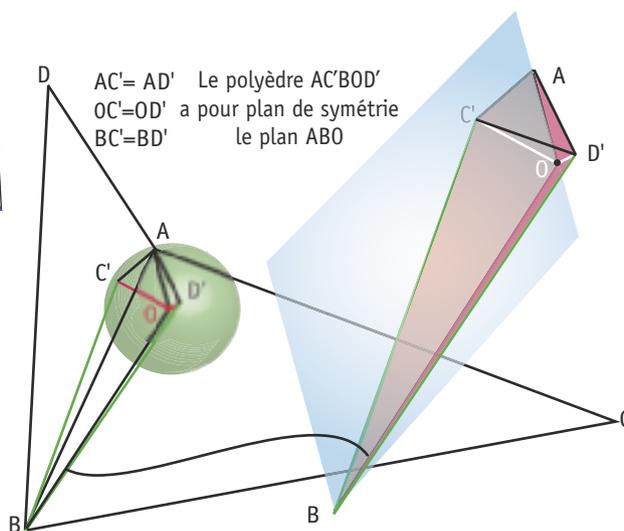
Il est bien question du cas général, car, au XIX^e siècle, différents résultats particuliers ont été donnés. Gerling, en 1844, démontre que l'on peut décomposer un tétraèdre en morceaux qui, réassemblés, donnent le tétraèdre symétrique par rapport à un plan. L'idée consiste à faire intervenir les points de tangence des faces avec la sphère inscrite. On obtient ainsi une décomposition en morceaux tous symétriques (voir la figure 2). Il est facile d'étendre ce résultat à un polyèdre quelconque et son symétrique en le décomposant en tétraèdres, comme on décompose un polygone en triangles. Puis Hill, en 1896, découvre trois familles de tétraèdres (qui seront complétés par 27 tétraèdres particuliers) qui peuvent être coupés en quelques morceaux, lesquels, réassemblés, donnent un cube. Un exemple en est donné sur la figure 3, où nous nous contentons de montrer le découpage qui conduit au prisme.

Toutefois, le prisme n'est jamais qu'un triangle plan un peu épais. On peut donc le découper pour obtenir un rectangle de même épaisseur et dont un des côtés vaut la racine cubique du volume, puis en le basculant et, en recommençant l'opération de découpage, arriver finalement au cube. Cela est assez long et donne de nombreux morceaux, mais il n'y en a qu'un nombre fini !

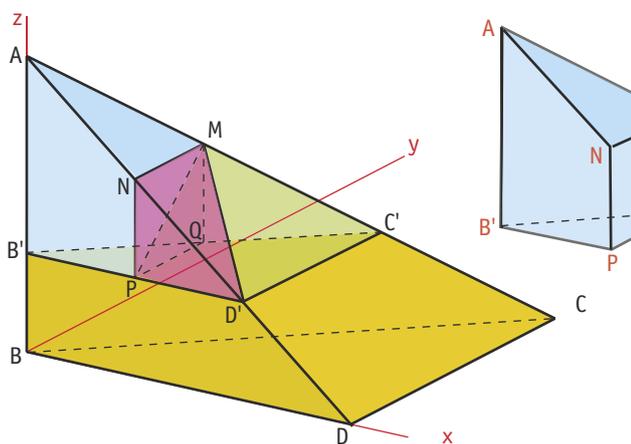
Au moment où Hilbert énonce son troisième problème, il est à peu près résolu depuis quelques mois grâce à Max



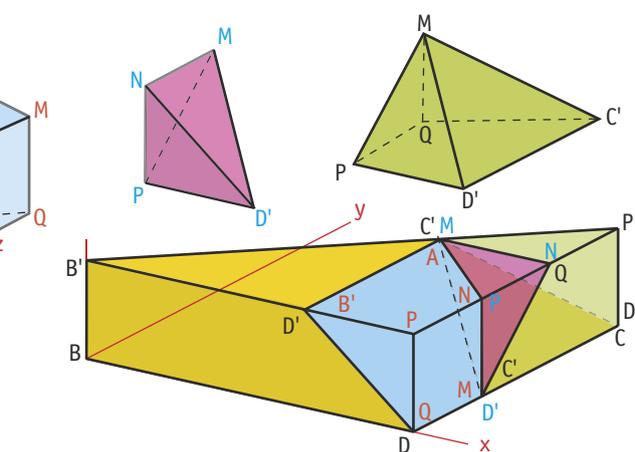
2. DÉCOUPAGE EN MORCEAUX et reconstruction du symétrique d'un tétraèdre ABCD quelconque : on décompose le tétraèdre ABCD en morceaux tels que $ABC'OD'$, où O est le centre de la sphère inscrite



et C' et D' les contacts de cette sphère avec les faces ABD et ABC. Ces différents morceaux permettent de construire le tétraèdre symétrique, car un solide symétrique est superposable à son image dans un miroir.



3. DÉCOMPOSITION DE HILL du tétraèdre $A(0,0,1) B(0,0,0) C(1,1,0) D(1,0,0)$ en quatre morceaux $BCDB'C'D'$, $AMNPQB'$, $MPD'C'Q$ et



$MNPD'$, avec $B'D'C'$ plan $z = 1/3$ et $MNPQ$ plan $x = 1/3$. On assemble selon le prisme de la seconde figure.

Dehn (1878-1952). En fait Dehn s'est appuyé sur les travaux du géomètre français Bricard datant de 1896, mais il ne donne qu'une condition nécessaire pour que deux polyèdres soient équidécomposables, et ce n'est qu'en 1965 que Sydler démontrera que cette condition est également suffisante.

Vers le Shaddock à six becs

Pour cette condition, Dehn a mis au point un indice, baptisé depuis « indice de Dehn ». Deux polyèdres sont équidécomposables (décomposables en les mêmes morceaux, en nombre fini) mais agencés autrement si et seulement s'ils ont le même indice de Dehn. La difficulté tient au fait que cet indice est assez technique. Pour chaque arête du polyèdre, on considère sa longueur l et l'angle α des faces qui déterminent cette arête. L'indice fait intervenir les couples (l, α) avec des règles de composition pour regrouper ces couples.

Il est quelquefois plus simple de revenir à la première idée de Bricard : on considère deux polyèdres, A possédant q arêtes dont les angles dièdres sont notés α_i et B possédant r arêtes dont les angles dièdres sont notés β_j . Si ces deux polyèdres sont équidécomposables, alors on peut trouver des entiers n_i et m_j et $p > 0$ tels que : $n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \dots + n_q\alpha_q = m_1\beta_1 + m_2\beta_2 + m_3\beta_3 + \dots + m_r\beta_r + p\pi$. Il est clair que si A est un cube, le premier membre peut s'écrire $n\pi/2$. Si B

est un tétraèdre régulier (tous les angles dièdres valent β), le deuxième membre peut s'écrire $m\beta$. Or il se trouve que β n'est pas une fraction rationnelle de $\pi/2$, d'où l'impossibilité de trouver n et m et, par conséquent, de faire mieux qu'Euclide ! Le tétraèdre de Hill donné figure 3 a des angles dièdres de $\pi/2, \pi/3, \pi/4$, et il est clair que $1 \times \pi/2 + 3 \times \pi/3 + 2 \times \pi/2 = 5 \times \pi/2$, d'où l'équidécomposition de ce tétraèdre avec le cube.

Une façon simple d'être sûr d'avoir l'équidécomposition avec le cube est de considérer un polyèdre dont tous les angles dièdres valent $\pi/2$. Contrairement à ce qu'on pourrait imaginer, ce n'est pas toujours un empilement de cubes façon cubes Soma (voir *Les cubes Soma*, dans ce dossier) puisque le polyèdre proposé par Borge Jessen en 1967, mais aussi par Adrien Douady en 1971 sous le nom de Shaddock à six becs (*figure à côté du titre de l'article*) n'a que des faces orthogonales entre elles. Les sommets sont les points $(\pm 2, \pm 1, 0), (0, \pm 2, \pm 1), (\pm 1, 0, \pm 2)$; huit des faces sont des triangles équilatéraux (*en violet*) et les douze autres des triangles isocèles (*en jaune*).

Mais, comme toujours, trouver le découpage correspondant n'est pas une mince affaire.

Jean LEFORT est ancien professeur de mathématiques en classe préparatoire, ancien animateur de l'IREM de Strasbourg.

Les cubes Soma

Jean LEFORT

Les arrangements des sept figures créées par Piet Hein, sont résolus avec de multiples stratégies mathématiques, notamment la théorie des invariants.



GRUKS DE PIET HEIN

Gruk de consolation

*Perdre un gant
Est certainement désagréable,
Mais ce n'est rien
Comparé à la douleur,
D'égarer un gant,
De jeter l'autre,
Et de retrouver ensuite le premier.*

Omniscience

*Savoir tout ce que
Vous ne savez pas,
Est en un certain sens,
De l'omniscience.*

Genre Humain

*L'homme, dit le diable,
Est bon pour son prochain,
Il ne veut pas corriger ses défauts,
Mais ceux des autres.*

Naïveté

*Vous êtes certainement naïfs,
Si vous pensez,
Que la vie est plus douce,
Pour ceux qui ne sont pas naïfs.*

Les lilas

*Les lilas fleurissent, délicats et sublimes,
Leurs parfums montent à la tête des poètes,
Et des amants qui rimaillent
Montrant tous pour la millièème fois,
Que faire est plus facile que dire.*



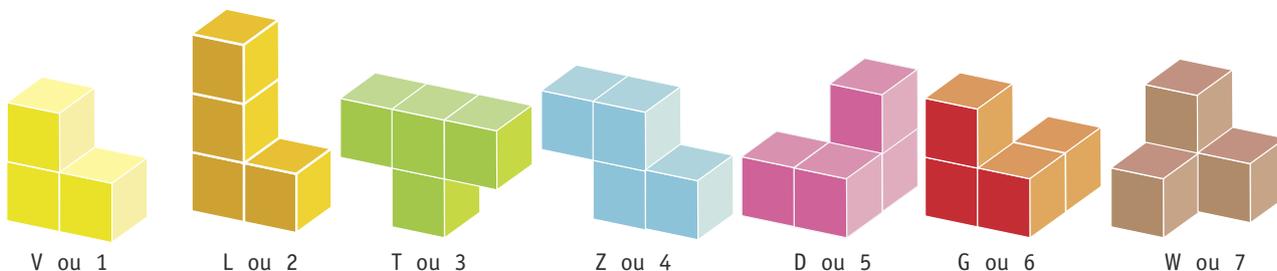
L'ingénieur danois Piet Hein (1905-1996) est plus connu dans son pays comme poète que comme mathématicien (*photographie de son buste à côté du titre*). Il a inventé une nouvelle forme poétique, les *Gruk*, contraction en danois de *grin* (rire) et *suk* (soupir) : il y a réellement, dans ces petits textes, de quoi rire et de quoi soupirer... ou pleurer...

Sous le pseudonyme de Kumbel, il mit au point un intéressant et curieux puzzle. La légende veut que ce soit en 1933, alors qu'il suivait une conférence d'Heisenberg sur la mécanique quantique, sujet qui le dépassait un peu, qu'il réalisa que les sept formes irrégulières que l'on peut former avec trois ou quatre petits cubes identiques accolés par une face peuvent s'assembler en un grand cube de $3 \times 3 \times 3$. On entend par forme irrégulière une forme différente d'un parallélépipède. Un brevet fut déposé en Grande-Bretagne en 1934 (n° 420 349), puis au Danemark en 1936 (n° 52 215).

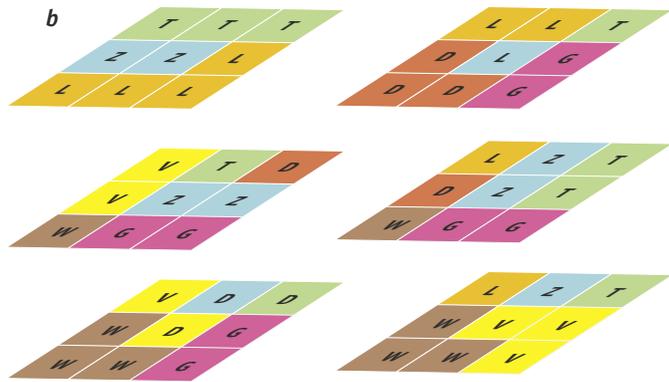
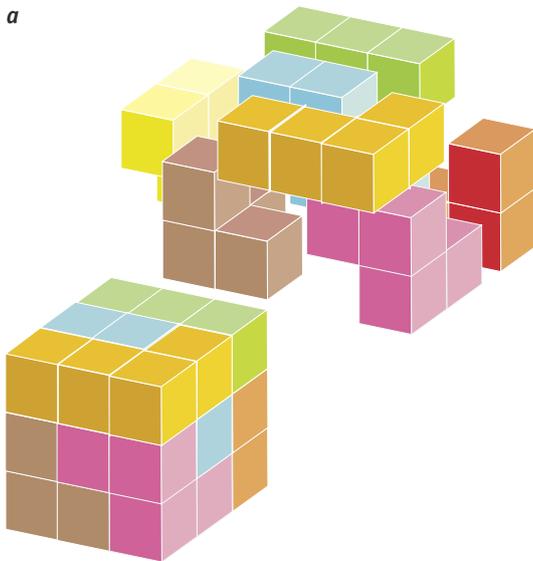
Ces sept pièces sont représentées sur la figure 1 et on leur attribue soit le numéro que leur a donné Piet Hein, soit un nom qui rappelle vaguement leur forme. Seules les pièces D et G qui sont énantiomères (c'est-à-dire image miroir l'une de l'autre) ont reçu un nom – Droite et Gauche – qui rappelle qu'elles sont comme un gant droit et un gant gauche. Dans la littérature anglo-saxonne on trouve A, B et P au lieu de D, G et W.

L'assemblage du cube

Il existe 240 façons d'assembler ces sept pièces pour former un cube, et la figure 2 donne un exemple de construction. Deux d'entre elles donnent un cube bloqué, c'est-à-dire



1. LES SEPT PIÈCES DU CUBE SOMA. Les noms qui leur sont attribués rappellent vaguement leur forme, sauf pour les D et G qui sont images miroir l'une de l'autre.



2. VUE ÉCLATÉE D'UNE CONSTRUCTION DU CUBE à partir des sept éléments somas (a), et deux représentations (b et c) par des plans d'étages de cette même construction. Si (b) correspond exactement à la vue éclatée, (c) représente cette même vue tournée d'abord de 90 degrés dans le sens horaire autour d'un axe vertical, puis de 90 degrés vers l'arrière autour d'un axe horizontal.

qu'on peut le tenir par un des sommets, une grande diagonale verticale, sans que tout s'écroule ! Bien évidemment, dans ce dénombrement, on ne compte qu'une fois des constructions qui se déduisent l'une de l'autre par des rotations ou par des symétries miroirs.

En effet, un même cube peut présenter l'une de ses six faces vers l'avant dans une des quatre positions possibles. Cela donne déjà 24 possibilités, qu'il faut multiplier par deux pour tenir compte des symétries, soit 48 en tout. Cela conduit à 11 520 présentations différentes. Mais on peut également colorier chacun des cubes élémentaires et, si cela se fait de manière à ce que les extrémités des pièces n'aient pas la même couleur, alors les pièces V, T, Z, D et G peuvent prendre deux positions différentes à l'intérieur du grand cube, et la pièce W, trois positions différentes. Cela multiplie le nombre d'agencements par 96, conduisant à un total de 1 105 920.

Tout ceci montre qu'il n'est pas facile de repérer deux constructions identiques.

La vue éclatée n'est pas des plus lisibles. Si c'est une bonne approximation du montage à effectuer, il faut encore faire un effort pour imaginer l'assemblage final. Une autre représentation possible est de préciser, pour chaque cube élémentaire de chacun des trois niveaux, la pièce à laquelle il appartient. La difficulté vient alors de l'effort nécessaire pour imaginer la pièce dans l'espace à partir de ce codage. Les vues (a) et (b) de la figure 2 sont prises sous le même angle ; il est alors facile de les identifier. Il n'en est pas de même de la vue (c) qui représente le même assemblage après rotation. C'est un sérieux exercice de vision dans l'espace que de vérifier qu'il s'agit bien du même assemblage mais pris sous un autre angle de vue. L'exercice aurait été encore plus difficile en ajoutant une symétrie.

Tout ceci pour faire comprendre que le dénombrement de toutes les combinaisons qui permettent de reconstituer un cube $3 \times 3 \times 3$ n'est pas un exercice évident. Aujourd'hui, l'informatique est une aide précieuse puisqu'il est facile de programmer l'ensemble des 48 transformations qui permettent d'identifier deux constructions

à partir de leur tableau sur trois étages. Il est un peu plus délicat de vérifier qu'un tableau correspond bien à une construction valide.

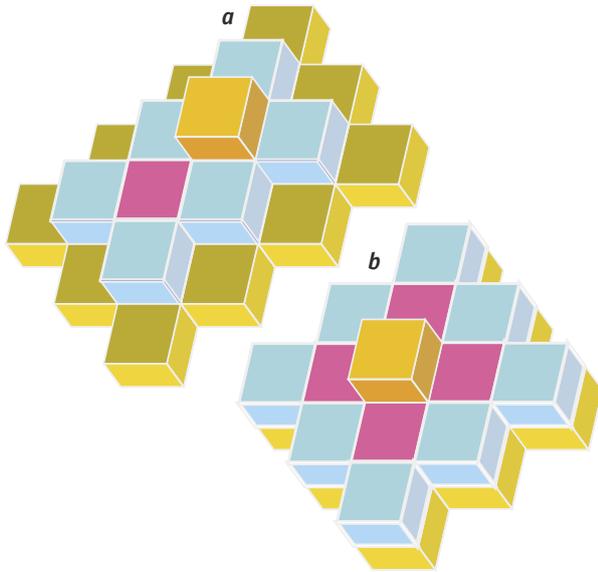
Constructions possibles et impossibles

Mais ce casse-tête a été inventé pour être manipulé physiquement et non virtuellement. Il paraît assez naturel de placer la pièce W en un sommet du grand cube. C'est en général ce que l'on fait la première fois que l'on découvre le jeu. Mais ceci n'est nullement obligatoire, comme le montre la figure 3.

Le nombre de problèmes que l'on peut se poser est immense. Le site de Bungaard (<http://www.fam-bundgaard.dk/SOMA/SOMA.HTM>) est remarquable à ce propos. Il est intéressant de se rendre compte que certaines constructions sont impossibles. Ces démonstrations d'impossibi-

Premier exemple				Second exemple		
L	L	T	Étage 3	V	Z	Z
V	V	T		V	V	G
V	Z	T		T	G	G
L	G	G	Étage 2	Z	Z	L
D	W	T		T	W	G
D	Z	Z		T	D	D
L	W	G	Étage 1	L	L	L
W	W	G		W	W	D
D	D	Z		T	W	D

3. DEUX CONSTRUCTIONS où la pièce W ne se trouve pas au sommet.

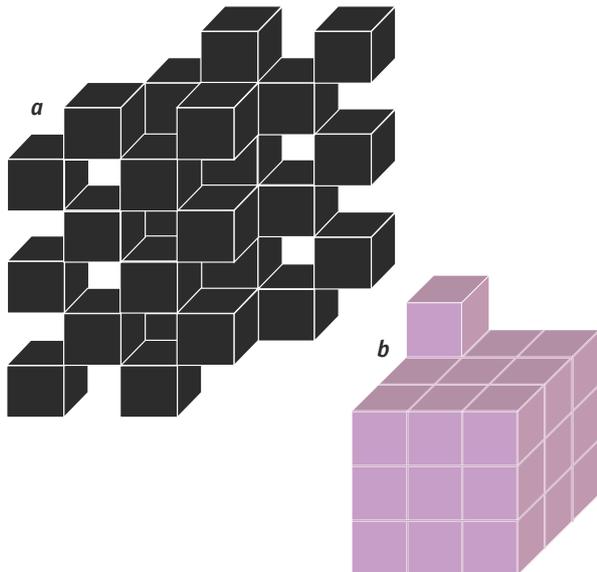


4. DEUX FIGURES IMPOSSIBLES.

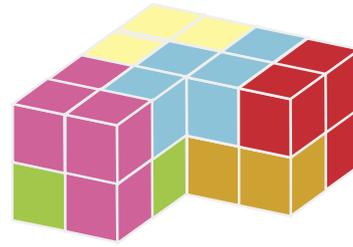
lités reposent sur des notions de parité. Il y a deux façons de la faire intervenir.

L'utilisation de la parité

1) Imaginons que nous ayons une sorte de damier noir et blanc tridimensionnel. Chaque pièce de l'espace (voir la figure 6) placée dans ce damier voit ses cubes élémentaires colorés alternativement en noir ou blanc. Nous appellerons parité de la pièce la différence entre le nombre de cubes blancs et le nombre de cubes noirs. Si on déplace la pièce dans le damier précédent, il peut y avoir échange des couleurs noires et blanches et la parité peut changer de signe mais pas de valeur absolue. Ainsi, la pièce V a une parité de ± 1 . On note alors que les pièces L, Z, D, G sont de parité nulle, les pièces T et W de parité ± 2 . Par suite, toute construction à l'aide des sept pièces du jeu



6. ESPACE REMPLI DE CUBES colorés en alternance (a) et question sur le cube (b): possible ou impossible ?



W	L	D	D
T	L	L	L
T	T		
T	G		

Étage 1

W	W	Z	D
W	Z	Z	D
G	Z		
G	G		

Étage 2

5. LA PIÈCE V, deux fois plus grande, faite des six autres pièces.

sera de parité ± 1 , ± 3 , ou ± 5 . Ainsi, la construction proposée sur la figure 4a, qui a une parité de 11, est impossible.

2) La figure 4b est également impossible et, pourtant, sa parité au sens précédent est 1. Pour démontrer cette impossibilité, nous allons utiliser un autre type de parité. Contentons-nous d'un damier ordinaire plan. Si nous plaçons une pièce sur un tel damier, nous colorons en noir (respectivement en blanc) tous les cubes élémentaires qui se trouvent au-dessus d'une case noire (respectivement blanche). Cherchons toutes les positions possibles de chaque pièce et, pour chacune de ces positions, définissons la parité comme la différence entre le nombre de cubes élémentaires de chaque couleur. La pièce V a toujours une parité de ± 1 , les pièces Z et W toujours une parité nulle et, pour les autres pièces L, T, D et G, c'est soit 0, soit ± 2 selon leur position. Nous voyons donc que toute construction a une parité de ± 1 , ± 3 , ± 5 , ± 7 ou ± 9 . Or la construction présentée sur la figure 4b a une parité de ± 11 , d'où son impossibilité.

Ces deux notions de parité ne sont évidemment pas suffisantes pour décider de tous les cas. Mais on peut les étendre aux constructions partielles n'utilisant qu'un nombre limité de pièces comme par exemple, à l'aide des six pièces autres que le V, construire le double de la pièce V (c'est possible, solution sur la figure 5) ou un parallélépipède $2 \times 2 \times n$ (c'est possible pour $n = 3, 4$ ou 5 , impossible pour $n = 2$ ou 6).

Pour terminer, un problème pseudoimpossible qui est illustré par la figure 6. Eh oui ! On dirait qu'il y a 28 cubes élémentaires, mais il y a une astuce cachée et très bien cachée, puisque toutes les faces sont pleines. Il ne reste qu'un endroit où il manque un cube élémentaire, au centre !

Solution : LLL/GGW/GWW//LDD/Z-D/GVW//TTT/ZTD/ZVV//---/---/Z--//. Les barres obliques sont des séparateurs de lignes et la double barre est un séparateur d'étages. Un tiret indique l'absence de pièce.

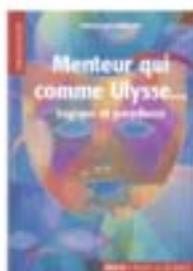
Jean LEFORT est ancien professeur de mathématiques en classe préparatoire, ancien animateur de l'IREM de Strasbourg.

Entrez dans l'univers des mathématiques !



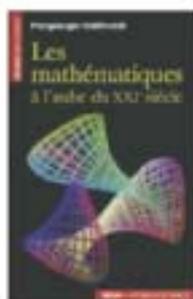
Les Déchiffreurs

Jean-François Dars, Annick Lesne, Anne Papillault



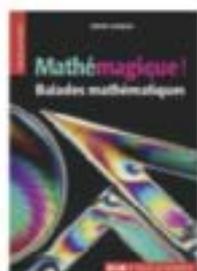
Menteur qui comme Ulysse...

Piergiorgio Odifreddi



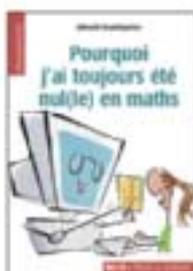
Les mathématiques à l'aube du XXI^e siècle

Piergiorgio Odifreddi



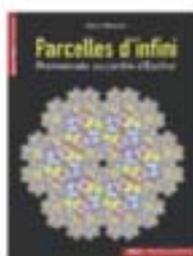
Mathémagique !

David Acheson



Pourquoi j'ai toujours été nul(le) en maths

Albrecht Beutelspacher



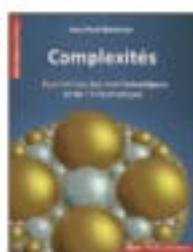
Parcelles d'infini

Alain Nicolas



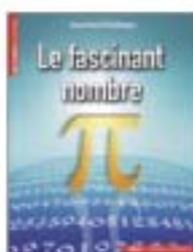
Jeux mathématiques et mathématiques des jeux

Jean-Paul Delahaye



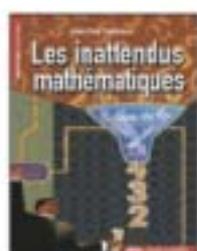
Complexités

Jean-Paul Delahaye



Le fascinant nombre

Jean-Paul Delahaye



Les inattendus mathématiques

Jean-Paul Delahaye



L'intelligence et le calcul

Jean-Paul Delahaye



Merveilleux nombres premiers

Jean-Paul Delahaye



BON DE COMMANDE

À retourner à : Éditions Belin – BP 2 – 28410 Saint-Lubin-de-la-Haye

Titre	Code	Prix unitaire	Qté	Prix total
Les Déchiffreurs	004737	19,50 €
Menteur qui comme Ulysse...	004286	17,50 €
Les mathématiques à l'aube du XXI ^e siècle	003830	16,00 €
Mathémagique !	004285	18,00 €
Pourquoi j'ai toujours été nul(le) en maths	003719	17,00 €
Parcelles d'infini	075075	21,00 €
Jeux mathématiques et mathématiques des jeux	075010	15,00 €
Complexités	075082	25,00 €
Le fascinant nombre Pi	071825	24,00 €
Les inattendus mathématiques	075073	22,00 €
L'intelligence et le calcul	075040	23,00 €
Merveilleux nombres premiers	075017	26,00 €

Participation aux frais de port et d'emballage :

France métropolitaine + 3,90 €
DOM-TOM et étranger + 9,90 €
TOTAL COMMANDE

Frais de port offerts
à partir de 45 euros
de commande*
*Gratuit pour la France métropolitaine
et de 6 euros pour les DOM-TOM et étranger.

Retrouvez nos parutions sur
www.editions-belin.com

Vous trouverez ci-joint mon règlement

Par chèque à l'ordre des Éditions Belin

Par mandat administratif

Par carte bancaire:

Numéro Date de validité

Cryptogramme visuel

Adresse de réception

Nom Prénom

Adresse

Code postal Ville

Pays Téléphone Mobile

Email @

Je souhaite être informé(e) des parutions des Éditions Belin

Signature obligatoire

Dominos dominés

Philippe BOULANGER et Éric ANGELINI

Les dominos, doubles carrés avec des chiffres, sont la source d'une variété insoupçonnée de questions et de récréations.

Les dominos semblent un jeu pour enfants. Pourtant les parties à quatre joueurs sont pleines d'astuces et de tactiques. Ce jeu est beaucoup joué à Caracas, au Venezuela, où, dans certains cafés spécialisés, le cliquetis des pièces posées sur des tables en marbre est assourdissant. Les dominos sont aussi une source de jeux mathématiques, physiques et de réalisations artistiques.

Utilisant plusieurs jeux de dominos, le mathématicien américain Robert Bosch a relevé un formidable défi, la création de portraits à base de dominos. Il utilise des jeux de 55 pièces allant du double zéro au double neuf. Si R. Bosch travaille avec 12 jeux de dominos, il utilisera 12 double-zéros, 12 dominos 0/1, etc. Les dominos sont tout à fait indiqués pour constituer des portraits où coexistent des mélanges adéquats de zones claires et de parties foncées. R. Bosch utilise un programme pour disposer les dominos reconstituant un portrait. Son programme commence par diviser la photographie en carrés, certains étant complètement blancs, d'autres entièrement noirs, avec tous les intermédiaires. Puis, en fonction des valeurs de gris, le programme détermine où va chaque domino (voir la figure 1).

Nombre de dominos

Combien existe-t-il de dominos dans le jeu classique du double-zéro au double-six ? Il y a, avec le 6 sur un domino, sept dominos (|6|6|, |6|5|, |6|4|, |6|3|, |6|2|, |6|1|, |6|0|), pour le 5, six dominos (|5|5|, |5|4|, |5|3|, |5|2|, |5|1|, |5|0|), car le domino 6/5 a déjà été compté, pour le 4, cinq dominos, etc., soit au total $7+6+5+4+3+2+1$ dominos. La somme d'une série arithmétique de 1 à n est $n(n+1)/2$, soit 28 pour n égal à 7. Pour les jeux de dominos de 1 à 9 de R. Bosch, il y a 55 pièces.

Il existe des parties nulles : vous pouvez construire deux chaînes ne se raccordant pas et donc des positions où aucun joueur ne peut jouer. Voici un exemple avec un jeu de |0|0| à |4|4| : |0|4|, |4|4|, |4|2|, |2|2|, |2|0|, |0|0| |0|3|, |3|3|, |3|1|, |1|1|, |1|0| et il reste la chaîne |1|4|, |4|3|, |3|2|, |2|1|.

Avec les dominos habituels, mentionnons un tour de salon : vous cachez un domino et vous demandez à un participant de ranger les dominos en une chaîne ouverte. Sans regarder la disposition des pièces, vous savez que les deux chiffres en bout de la chaîne ouverte sont ceux du domino caché.

Le grand physicien et vulgarisateur George Gamow (1904-1968) aimait expliquer les invariants sur l'exemple suivant : peut-on recouvrir, avec des dominos occupant deux cases adjacentes, un échiquier dont on a enlevé les deux coins opposés d'une grande diagonale ? Cela semble difficile à essayer d'une manière exhaustive. Toutefois, on remarque qu'à chaque fois que l'on pose un domino, on recouvre une case noire et une case blanche. Il y a sur un échiquier non amputé autant de cases noires que de cases blanches (32 de chaque), mais les coins opposés étant de la même couleur, on ne pourra jamais recouvrir les deux cases blanches « en trop » portant la couleur complémentaire des cases supprimées. Lors de la pose des dominos, l'invariant est la différence entre le nombre de cases noires et de cases blanches. Remarquons que pour la plupart des jeux comme les échecs, il n'est pas nécessaire de colorier les cases de façon alternée, mais le coloriage facilite la visualisation des pièces et leur mouvement.

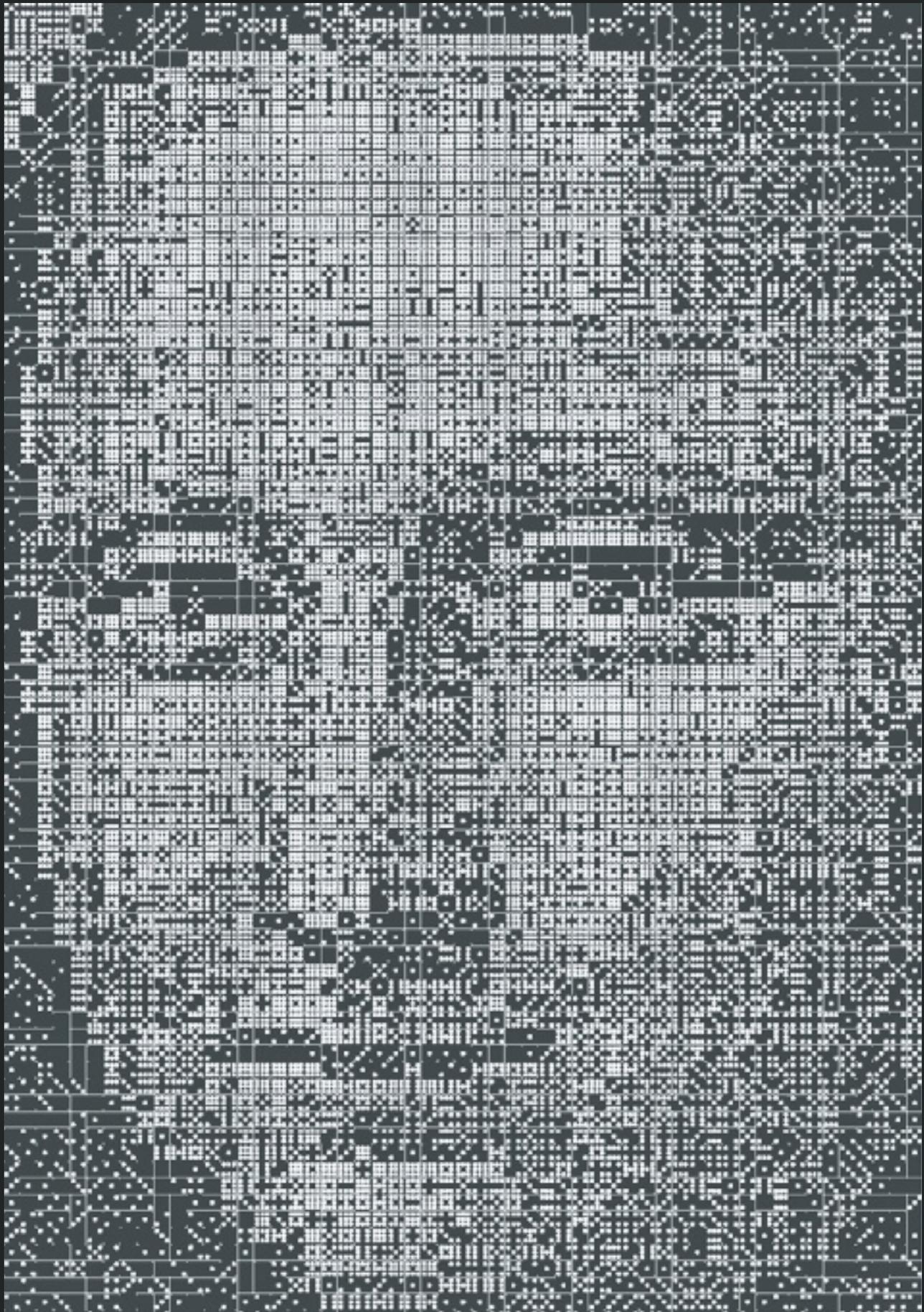
Le problème a un prolongement : si nous enlevons, non plus des cases de même couleur, mais deux cases de couleurs différentes, pouvons-nous toujours placer des dominos pour recouvrir les 62 cases restantes de l'échiquier ? La réponse est oui en suivant le tracé indiqué sur la figure 1. On obtient alors deux chemins qui commencent chacun à une case supprimée et finissent à une autre case supprimée ; comme chaque chemin a un nombre pair de cases, il est remplissable par des dominos.

Cram et Cross Cram

Le jeu de *Cram*, d'analyse plus difficile, a un principe équivalent : il s'agit de placer chacun à son tour des dominos recouvrant deux cases sur des échiquiers de dimensions rectangulaires. Le joueur qui ne peut plus jouer a perdu, ou gagné dans la version « Qui perd gagne ». Bien évidemment, les chiffres sur les dominos n'ont aucune importance.

Des stratégies gagnantes existent pour certaines dimensions d'échiquier : si les deux côtés de l'échiquier ont un nombre pair de cases, alors il suffit, pour gagner, de jouer symétri-

1. LE TABLEAU DE MONA LISA fait avec 40 jeux de dominos à 55 pièces. Vous pouvez vous faire tirer le portrait sur le site <http://www.dominoartwork.com/>



quement par rapport au centre de l'échiquier, et le second joueur gagne toujours. Si l'on interdit de placer symétriquement le second domino, on ne connaît pas de stratégie gagnante pour un échiquier classique 8×8. Pour un échiquier où un côté a un nombre pair de cases et l'autre un nombre impair, le premier joueur gagne en prenant le premier coup, les deux cases centrales, puis en jouant symétriquement.

Si les deux côtés de l'échiquier rectangulaire ont un nombre impair de cases, il n'existe pas de solution dans le cas général. Il y a des cas particuliers : le jeu 5×5 est entièrement résolu : le second joueur gagne dans la variante directe, mais perd à « Qui perd gagne ».

Une variante de *Cram* est *Cross Cram* : le premier joueur doit placer ses dominos horizontalement et le second, verticalement. Le jeu est déjà intéressant sur un échiquier 4×4, où le premier joueur gagne dans les versions directes ou à « Qui perd gagne ».

Suites de dominos

Il y a plusieurs manières de faire entrer tous les dominos d'un jeu standard dans un rectangle 2×28 (ces dominos sont au nombre de 28 et portent des points allant de 0 à 6

sur chaque carré de base). Mettez les pièces à plat, faces visibles, et disposez-les au choix, tantôt verticalement dans le rectangle, tantôt horizontalement (voir la figure 3). Découpez maintenant par la pensée ce rectangle en 28 parts verticales égales ressemblant au domino de droite.

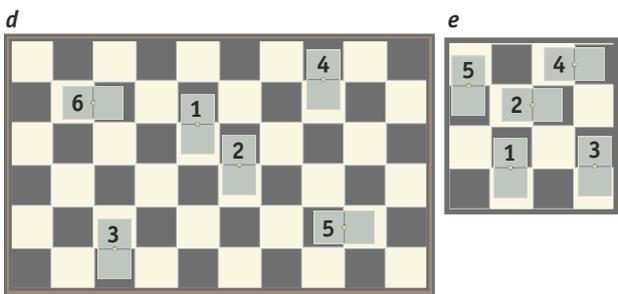
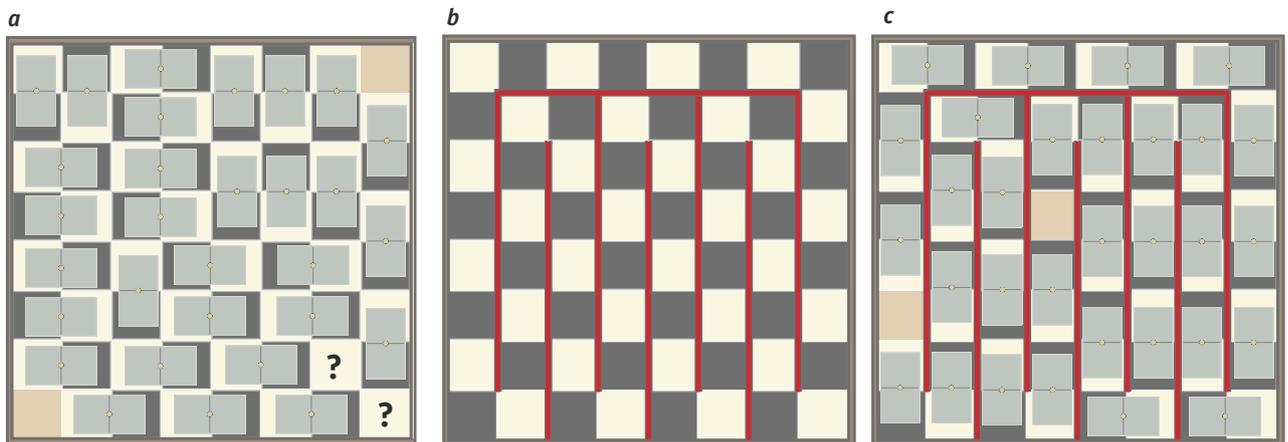
Interprétez ces parts comme des fractions (ici 5/2) et summez-les. Les questions que nous posons sont : quel pourrait être un rangement du rectangle initial conduisant à la somme la plus basse possible ? Et que vaut cette somme minimale ? Il faut s'interdire les 0 au dénominateur, bien sûr. La disposition ci-dessous (représentée aussi sur la figure 2b) vaut $7 - 1/60$; est-elle minimale ?

0 0|0|0|0 1|0 2|0 3|1|1 1|1|1|2|2|2 2|2|2 3|3|3 1|1 2|
3 3|4|5|6|3 4|3 5|4 6|4|4 4|5|6|4|5|5 5|6|6 6|6|6 5|4 5|

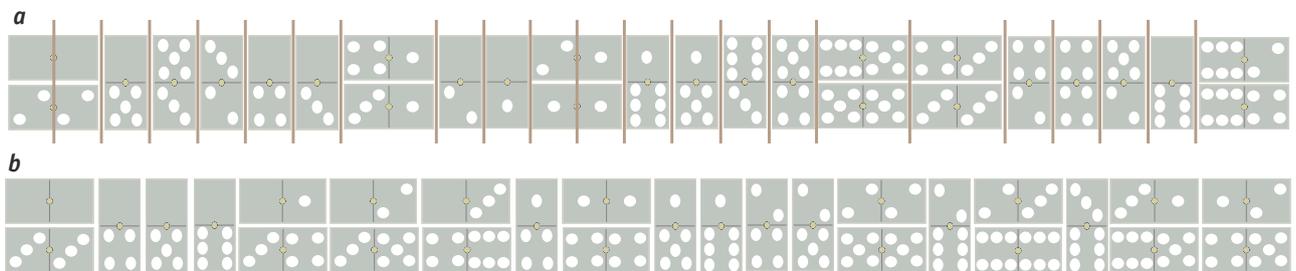
La question naturelle qui se pose alors : quel est le plus petit entier constructible exactement comme somme de toutes les fractions, 7 ou 8 ? Selon l'un de nous (Éric Angelini), 7 est impossible, et une disposition (parmi d'autres) des 28 dominos en rectangle 2×28 produisant 8 est :

0|0|0|0|0 0|0 1|0 2|1 1|3|1 2|1 3|1|2 2|2|3|2 3|3 3|3|2|
6|5|4|3|2 4|1 4|1 5|4 4|4|4 5|4 6|6|5 5|5|5 5|6|6|6|6|

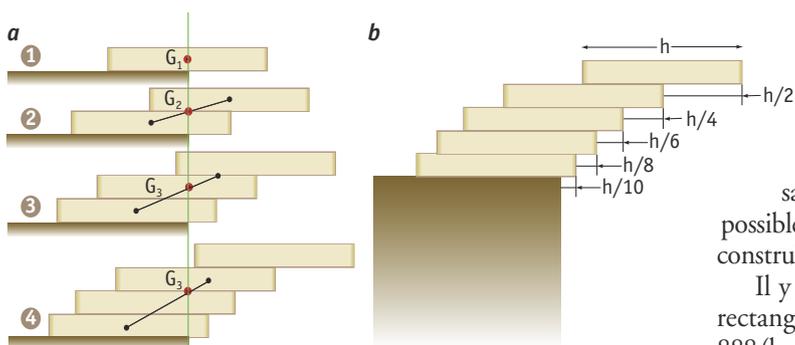
Fabriquons à présent une suite minimale de dominos : nous alignons les 28 dominos pour former un rectangle 1×56.



2. ESSAI INFRACTUEUX DE REMPLISSAGE (a) avec des dominos d'un échiquier auquel on a enlevé deux cases de même couleur. Chemin délimité par des guides rouges (b) à suivre pour remplir un échiquier où l'on a enlevé deux cases (c) de couleurs différentes. Dans une partie de *Cram*, chaque joueur pose à son tour un domino recouvrant deux cases sur l'échiquier, et celui qui ne peut plus jouer a perdu. Sur l'échiquier (d), le second joueur, pour gagner, place son domino symétriquement à celui qu'a posé le premier joueur par rapport au point central (les côtés de l'échiquier comportent un nombre pair de cases). Dans le jeu de *Cross Cram*, le premier joueur place ses dominos horizontalement, le second verticalement (e).



3. DEUX REMPLISSAGES D'UN RECTANGLE 2×28, par un jeu de dominos où des coups de hache rouges matérialisent 28 fractions (a). En (b), la somme des 28 fractions (0/3, 0/3, 0/4, 0/5, etc.) semble minimale et vaut $7 - 1/60$.



4. LE SURPLOMB D'UNE PILE DE DOMINOS est illustré par les différentes étapes de sa constitution : le centre de gravité de la pile de dominos doit être au plus à l'aplomb du bord de la table (a). Le surplomb (b) augmente comme les termes d'une série harmonique dont la somme augmente très lentement jusqu'à l'infini : il faut $2,7 \times 10^8$ dominos pour un surplomb de dix dominos.

C'est la dernière suite qui est la bonne : il n'y a pas moyen de disposer les quatre dominos autrement afin de descendre sous le total de 75. Attaquons-nous maintenant au gros morceau : quel remplissage du rectangle 1×56 conduit au total le plus petit possible (quand on somme tous les nombres de la suite ainsi construite) ? Que vaut ce total ?

Il y a cinq arrangements de dominos possibles dans le rectangle 1×56 produisant des suites de total minimum 888 (la position du « double-zéro » fournit la clef du problème) : nous vous en indiquons un, vous pourrez trouver les autres !

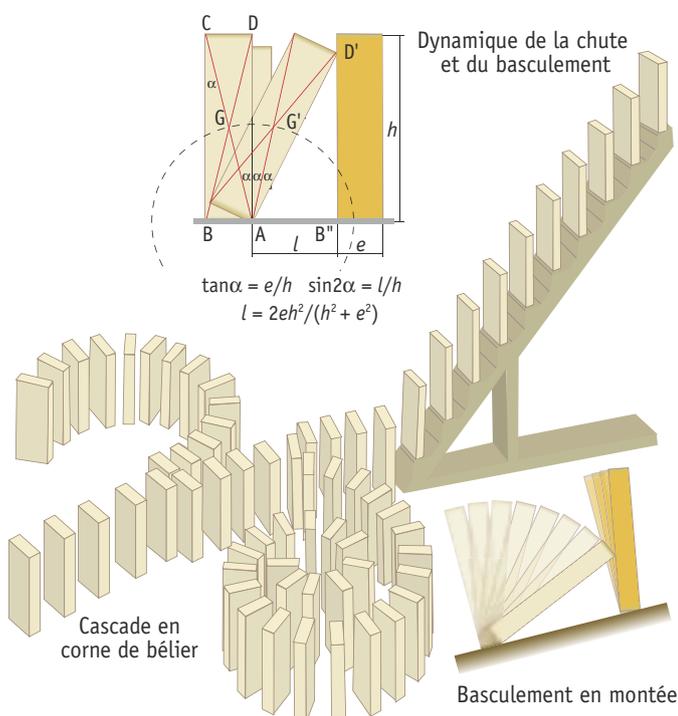
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 13, 14, 15, 16, 20, 22, 24, 25, 26, 30, 33, 34, 35, 36, 40, 44, 46, 50, 55, 56, 60, 61, 100

Empilement et cascades

Le surplombement des dominos apparaît aussi surprenant qu'inefficace : quel est le surplomb maximal que l'on peut atteindre en empilant des dominos au bord d'une table (voir la figure 4) ? En théorie, le surplomb va jusqu'à l'infini ; en pratique, il augmente très lentement.

Les dominos sont en équilibre tant que la verticale passant par le centre de gravité des dominos considérés coupe la table. Pour raisonner, il est plus facile de partir du haut de l'empilement. Lorsque la pile comporte n dominos, le surplomb maximal est égal à $(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \dots + 1/n)h/2$, où h est la longueur d'un domino. La série harmonique $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \dots + 1/n$ diverge : sa somme augmente à l'infini, mais extrêmement lentement ; il faut $1,5 \times 10^{44}$ dominos, soit le nombre total d'électrons de l'Univers, pour que le surplomb soit égal à 50 longueurs de dominos.

Les cascades de dominos sont à voir sur une petite vidéo : <http://www.wat.tv/playlist/379615/video/245415/aliv-master-domino-cascade.html>. Le principe de fonctionnement est que l'énergie cinétique lors de l'impact d'un domino sur le suivant est suffisante pour faire basculer le second domino (voir la figure 5). Lors de ce basculement, le centre de masse d'un domino s'élève et il faut lui communiquer de l'énergie pour cela. En ne tenant compte que du mouvement de deux dominos et en nous plaçant dans le cas idéal où il n'y a pas de frottements (pas de vibrations lors du choc), le centre de masse du premier domino doit descendre, lors de son basculement, de la hauteur d au moins égale à $(r - h)/2$, égal à la montée du second domino (r est la diagonale de la tranche du demi-domino). Il faut donc que les dominos soient espacés d'une longueur l au moins égale à $2eh^2/(h^2 + e^2)$. Avec des hypothèses raisonnables, on calcule une vitesse de propagation de l'onde de l'ordre de quelques dizaines de centimètres par seconde pour un domino ordinaire, ce qui est le bon ordre de grandeur. Il y a toute une civilisation dans le domino !



5. DYNAMIQUE D'UNE CASCADE : si l'on néglige les frottements, la vitesse de propagation de la cascade est obtenue en calculant la distance de chute pour que le second domino bascule en élevant son centre de masse à la verticale de l'arête de pivotement.

Nous interprétons la succession des cases unités (portant toujours des points allant de 0 à 6) comme le « squelette » (des exemples de squelettes sont donnés dans *Jeux de suite*, par Éric Angelini, pages 32 à 35) d'une suite monotone croissante (dans une telle suite chaque nombre est supérieur à son voisin de gauche). Mettez à présent des virgules (imaginaires) où vous voulez sur le squelette et additionnez les nombres de la suite. Quel est le plus petit total auquel on puisse parvenir ?

Illustrons le problème avec le cas où l'on ne disposerait que des quatre dominos suivants : [0/3] [0/5] [1/2] [4/6].

Voici des suites possibles, suivies de leur total :

[0/5][6/4][2/1][0/3] --> 0, 5, 6, 42, 103 --> 156
 [1/2][3/0][4/6][5/0] --> 12, 30, 46, 50 --> 138
 [0/5][1/2][3/0][4/6] --> 0, 5, 12, 30, 46 --> 93
 [0/3][4/6][1/2][5/0] --> 0, 3, 4, 6, 12, 50 --> 75

Philippe BOULANGER est conseiller scientifique de la revue *Pour la Science*. **Éric ANGELINI** est producteur de télévision, amateur d'énigmes mathématiques et spécialiste des suites.

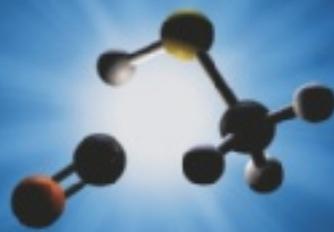
Jean-Paul DELAHAYE, *Dominos les dominos*, in *Pour la Science* n° 345, juillet 2006.

Martin GARDNER, *Math' Circus*, Bibliothèque Pour la Science, 1982.

Jearl WALKER, *La physique des dominos*, in *Pour la Science* n° 84, octobre 1984.

Dans le prochain Dossier de *Pour la Science*

LA VIE, UNIQUE OU BANALE ?



- L'apparition de la vie sur la Terre
- La recherche de la vie ailleurs
- La synthèse de la vie en laboratoire

En kiosque début juillet 2008

KEN LEWIS/BioGrafx

POUR LA SCIENCE

8, rue Férou 75278 PARIS CEDEX 06 • Tél : 01-55-42-84-00 • www.pourlascience.com
Commande de dossiers ou de magazines : 08-92-68-11-40

POUR LA SCIENCE

Directrice de la rédaction - Rédactrice en chef : Françoise Pétry

Pour la Science :

Rédacteurs en chef adjoints : Maurice Mashaal, Loïc Mangin

Rédacteurs : François Savatier, Philippe Ribeau-Gésippe,

Bénédicte Salthun-Lassalle

Dossiers Pour la Science :

Rédactrice en chef adjointe : Bénédicte Leclercq

Rédacteur : Guillaume Jacquemont

Génies de la Science :

Rédactrices : Marie-Neige Cordonnier et Bénédicte Leclercq

Cerveau & Psycho :

Rédacteurs : Sébastien Bohler et Bénédicte Salthun-Lassalle

Directrice artistique : Céline Lapert

Secrétariat de rédaction/Maquette : Annie Tacquenet, Sylvie Sobelman,

Pauline Bilbault, Raphaël Queruel, Ingrid Leroy

Site Internet : David Martin

Marketing et Publicité : Ph. Rolland, assisté de M. Ballini et H. Chappes

Direction financière : Anne Gusdorf

Direction du personnel : Jean-Benoît Boutry

Fabrication : Jérôme Jalabert, assisté de Marianne Sigogne

Presse et communication : Susan Mackie

Directeur de la publication et Gérant : Marie-Claude Brossollet

Conseillers scientifiques : Philippe Boulanger et Hervé This

A également participé à ce numéro : Pascale Thiollier-Dumartin

SERVICE ABONNEMENTS

Ginette Grémillon : Tél. : 01 55 42 84 04

Abonnements pour la Belgique: EDIGROUP Belgique Sprl- 5 place du Champs

de Mars - 20th floor - 1050 Bruxelles - tel 070/233 304 - abobelgique@edigroup.org

Abonnements pour la Suisse: EDIGROUP SA - 39 rue Peillonex CH 1225 Chene

Bourg - Tel 022/860 84 01 - abonne@edigroup.ch

PUBLICITÉ France

Directeur de la Publicité : Jean-François Guillotin (jf.guillotin@pourlascience.fr),

assisté de Nada Mellouk

Tél. : 01 55 42 84 28 ou 01 55 42 84 97 • Télécopieur : 01 43 25 18 29

DIFFUSION DE POUR LA SCIENCE

Canada : Edipresse : 945, avenue Beaumont, Montréal, Québec, H3N 1W3
Canada.

Suisse : Servidis : Chemin des châlets, 1979 Chavannes - 2 - Bogis

Belgique : La Caravelle : 303, rue du Pré-aux-oies - 1130 Bruxelles.

Autres pays : Éditions Belin : 8, rue Férou - 75278 Paris Cedex 06.

SCIENTIFIC AMERICAN Editor in chief : John Rennie. Board of editors : Mariette Di Christina, Ricky Rusting, Philip Yam, Gary Stix, Mark Alpert, Steven Ashley, Peter Brown, Graham Collins, Mark Fischetti, Steve Mirsky, George Musser, Christine Soares. Chairman : Brian Napack. President : Steven Yee. Vice president and managing director international : Dean Sanderson. Vice president : Frances Newburg. Chairman Emeritus : John Hanley.

Toutes demandes d'autorisation de reproduire, pour le public français ou francophone, les textes, les photos, les dessins ou les documents contenus dans la revue « Pour la Science », dans la revue « Scientific American », dans les livres édités par « Pour la Science » doivent être adressées par écrit à « Pour la Science S.A.R.L. », 8, rue Férou, 75278 Paris Cedex 06.

© Pour la Science S.A.R.L.

Tous droits de reproduction, de traduction, d'adaptation et de représentation réservés pour tous les pays. La marque et le nom commercial « Scientific American » sont la propriété de Scientific American, Inc. Licence accordée à « Pour la Science S.A.R.L. ».

En application de la loi du 11 mars 1957, il est interdit de reproduire intégralement ou partiellement la présente revue sans autorisation de l'éditeur ou du Centre français de l'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins - 75006 Paris).